САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
МОРСКОЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра сопротивления материалов

РАСЧЕТ СТЕРЖНЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СУДОВЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Часть II

Методические указания

Санкт-Петербург
2000

Методические указания, предназначенные для студентов Санкт-Петербургского государственного морского технического университета вечерней и заочной форм обучения, помогут им самостоятельно разобраться в решении задач. Здесь приведены примеры расчета систем при сложном сочетании нагрузок и определения перемещений в стержневых системах энергетическими методами. Материал указаний должен способствовать успешному выполнению домашних заданий, расчетно-проектировочных работ.

СИВЕРС
Михаил Николаевич

СОРОКИН
Сергей Владиславович

УСАЧЕВ
Александр Михайлович

РАСЧЕТ СТЕРЖНЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СУДОВЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Часть II

Методические указания

Ответственный редактор канд.техн.наук, доц. К.И.Николаев
Редактор Т.А.Канн

Подписано в печать 11.05.2000. Зак.1599. Тир.300. Уч.-изд.л.3,0.
Изд.центр СПбГМТУ, Лоцманская, 10.

I. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СПОСОБЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

I.I. Потенциальная энергия упругой деформации стержня. Теорема Кастильяно

В общем случае нагружения стержня в его поперечных сечениях возникает шесть силовых факторов: продольная сила N, крутящий момент M_x, поперечные силы Q_y и Q_z (рис.I.Iа) и изгибающие моменты M_y и M_z (рис.I.Iб). Каждый из этих силовых факторов вносит свой вклад в потенциальную энергию упругой деформации элемента стержня, вычисляемую по формуле

$$dU = \frac{N^2 dl}{2EF} + \frac{Q_y^2 dl}{2GF_y} + \frac{Q_z^2 dl}{2GF_z} + \frac{M_x^2 dl}{2GI_к} + \frac{M_y^2 dl}{2EI_y} + \frac{M_z^2 dl}{2EI_z}, \quad (I.I)$$

где E – модель продольной упругости; G – модуль сдвига; F – площадь поперечного сечения стержня; I_z, I_y – осевые моменты инерции поперечного сечения; $I_к$ – момент инерции при кручении (материал стержня подчиняется закону Гука).

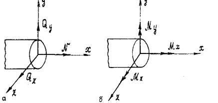


Рис.I.I. Внутренние усилия (а) и внутренние моменты (б) в поперечном сечении

Таким образом, формула для полной потенциальной энергии упругой деформации всего стержня, который может быть составным, непризматическим, ломаным или кривым (рис.I.2), имеет вид

$$U=\frac{1}{2}\sum_{K=1}^{K}\int_0^{\ell_K}\left[\frac{N^2}{EF}+\frac{M_x^2}{GI_K}+\frac{Q_y^2}{GF_y}+\frac{M_z^2}{EI_z}+\frac{Q_z^2}{GF_z}+\frac{M_y^2}{EI_y}\right]d\ell_K, \qquad (I.2)$$

где K – количество участков; ℓ_K – их длины.

Рис.I.2. Составной стержень, имеющий криволинейные и ломаные участки разной жесткости

Естественно, что вклад каждого из слагаемых (I.2) в общую величину U неодинаков и определяется способом нагружения стержня. Так, в случае, представленном на рис.I.3а, единственным ненулевым будет первое слагаемое, а в случае, представленном на

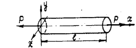


Рис.I.3а. Одноосно растягиваемый призматический стержень

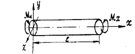


Рис.I.3б. Стержень круглого поперечного сечения, закручиваемый приложенными на торцах моментами

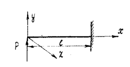


Рис.I.3в. Консольный стержень, изгибаемый сосредоточенной силой, приложенной на свободном конце

рис.I.3в - третье и четвертое. Предсказать, какие из слагаемых в (I.2) будут большими, а какие маленькими, можно, установив характер деформации стержня (растяжение, кручение, изгиб, косой изгиб и т.д.).

Знание полной потенциальной энергии упругой деформации дает определенную информацию о состоянии конструкции, но в основном формула (I.2) используется для формулировки теоремы Кастильяно, согласно которой частная производная от потенциальной энергии упругой деформации стержня по силе равна перемещению точки приложения силы по направлению этой силы.

Пусть все силовые факторы, перечисленные в (I.2), порождены действием одной силы P. Заметим, что при этом N, Q_y, ..., M_z становятся функциями двух переменных: координаты x, отсчитываемой вдоль оси стержня, и величины силы P, причем зависимость от P является линейной. Тогда формулировка теоремы Кастильяно приобретает вид

$$\delta_P=\frac{\partial U}{\partial P}. \qquad (I.3)$$

При подстановке (I.2) в (I.3) следует заметить, что интегрирование и дифференцирование выполняется по разным переменным и их можно переставить. Тогда, вспоминая правило дифференцирования сложных функций, получим

$$\delta_P=\sum_{K=1}^{K}\int_0^{\ell_K}\left[\frac{N(x,P)}{EF}\frac{\partial N}{\partial P}+\frac{M_x(x,P)}{GI_K}\frac{\partial M_x}{\partial P}+\ldots\frac{M_y(x,P)}{EI_y}\frac{\partial M_y}{\partial P}\right]dx. \qquad (I.4)$$

Формула (I.4) используется для определения перемещений в стержневых конструкциях. Покажем это на примерах.

П р и м е р I.I.I. Определим абсолютную осевую деформацию $\Delta\ell$ стержня (см.рис.I.3а).

Р е ш е н и е. Введя в рассмотрение систему координат, жестко связанную с левым торцевым сечением, заключаем, что эта деформация представляет собой перемещение точки приложения силы P на правом торце, т.е.

$$\Delta\ell=\delta_P=\frac{\partial U}{\partial P}.$$

Из шести слагаемых, представленных в (I.4), отличным от нуля в рассматриваемом случае является только одно:

$N(x,P) = P$. Соответственно $\dfrac{\partial N(x,P)}{\partial P} = 1$. Таким образом, учитывая, что стержень имеет только один участок, получим

$$\Delta\ell = \delta_p = \int_0^\ell \frac{N(x,P)}{EF}\frac{\partial N(x,P)}{\partial P}dx = \int_0^\ell \frac{P}{EF}\,1\,dx = \frac{P\ell}{EF}.$$

Естественно, что полученный ответ представляет собой формулировку закона Гука для одноосно растянутого стержня.

Знак перемещения, вычисленного при помощи теоремы Кастильяно, позволяет легко установить его направление. Если перемещение оказалось положительным (как в примере I.I.I), то его направление совпадает с направлением приложенной силы, если отрицательным, то перемещение происходит в противоположную сторону.

Другим существенным обстоятельством является то, что в формулировке теоремы Кастильяно говорится об обобщенной силе и соответствующем ей обобщенном перемещении. Таким образом, используя теорему Кастильяно, можно вычислять не только линейные перемещения в точках приложения сосредоточенных сил, но и, например, угловые перемещения в точках приложения моментов.

П р и м е р I.I.2. Определим угол взаимного поворота торцов $\Delta\varphi$ стержня круглого поперечного сечения (рис. I.3б).

Р е ш е н и е. Введем в рассмотрение систему координат, жестко связанную с левым торцевым сечением. Очевидно, что стержень подвержен чистому кручению, и угол закручивания представляет собой обобщенное перемещение точки приложения крутящего момента m на правом торце, т.е.

$$\Delta\varphi = \frac{\partial U}{\partial m} = \delta_m .$$

Из теста слагаемых, представленных в (I.4), отличным от нуля является только одно:

$$M_x(x,m) = m\,, \qquad \frac{\partial M_x(x,m)}{\partial m} = 1 .$$

Следовательно:

$$\Delta\varphi = \delta_m = \int_0^\ell \frac{M_x(x,m)}{GI_p}\frac{\partial M_x(x,m)}{\partial m}dx = \int_0^\ell \frac{m\cdot 1}{GI_p}dx = \frac{m\ell}{GI_p}.$$

Естественно, что полученный ответ представляет собой формулировку закону Гука для чистого кручения круглого стержня.

При определении перемещений в случае плоского изгиба интегрированием дифференциального уравнения прогнутой оси балки не учитывались перемещения от сдвига. Для того чтобы оценить допускаемую при этом погрешность, рассмотрим следующий пример.

П р и м е р I.I.3. Определим прогиб свободного конца консольной балки υ, загруженной силой P (см. рис. I.3в).

Р е ш е н и е. В этом случае

$$\upsilon = \delta_p = \frac{\partial U}{\partial P}.$$

Формула (I.4) приобретает вид

$$\upsilon = \int_0^\ell \left[\frac{M_z(x,P)}{EI_z}\frac{\partial M_z(x,P)}{\partial P} + \frac{Q_y(x,P)}{GF_y}\frac{\partial Q_y(x,P)}{\partial P}\right]dx. \quad (I.5)$$

В примерах I.I.I, I.I.2 внутренние силовые факторы определялись элементарно и не изменялись по длине стержня. В рассматриваемом примере, воспользовавшись методом сечений, получим:

$$Q_y(x,P) = P\,, \quad M_z(x,P) = Px .$$

Соответствующие производные имеют следующий вид:

$$\frac{\partial Q_y(x,P)}{\partial P} = 1\,; \quad \frac{\partial M_z(x,P)}{\partial P} = x .$$

Подставляя эти формулы в (I.5), получим:

$$\upsilon = \int_0^\ell\left[\frac{Px}{EI_z}x + \frac{P}{GF_y}1\right]dx = \int_0^\ell \frac{Px^2}{EI_z}dx + \int_0^\ell \frac{P\,dx}{GF_y} =$$

$$= \frac{P\ell^3}{3EI_z} + \frac{P\ell}{GF_y} = \frac{P\ell^3}{3EI_z}\left(1 + \frac{3EI_z}{GF_y\ell^2}\right).$$

Первое слагаемое в полученной формуле представляет собой прогиб балки от изгиба и может быть получено интегрированием дифференциального уравнения изогнутой оси. Второе слагаемое представляет собой прогиб от сдвига. Сдвиговые деформации при изгибе балок можно представить как результат скольжения поперечных сечений друг относительно друга без *поворота нормалей к ним. Сравним величину прогибов от сдвига* с величиной изгибного перемещения. Для определенности будем считать, что поперечное сечение балки – прямоугольник со сторонами b и h, $I_x = \frac{bh^3}{12}$, а приведенная площадь определяется по Тимошенко: $F_y = \frac{5}{6} bh$. Наконец, для стали $\frac{E}{G} = 2(1+\mu) = 2{,}6$. Таким образом:

$$\frac{3EI_x}{GF_y l^2} = \frac{3 \cdot 2{,}6 \frac{bh^3}{12}}{\frac{5}{6} bhl^2} = 0{,}78\left(\frac{h}{l}\right)^2.$$

Поскольку техническая теория изгиба применима при $\frac{h}{l} < 0{,}2$, приходим к выводу, что прогиб от сдвига составляет менее 5% прогиба от изгиба. Поэтому в дальнейшем мы не будем учитывать прогибы от сдвига, оставляя в формуле (I.4) лишь изгибные составляющие.

П р и м е р I.I.4. Определить угол поворота на левой опоре балки, представленной на рис. I.4а.

Р е ш е н и е. Имеем

$$\varphi_m = \frac{\partial U}{\partial m} = \int_0^l \frac{M_x(m,x)}{EI_x} \frac{\partial M_x(m,x)}{\partial m} dx .$$

Составим выражение для изгибающего момента $M_x(m,x)$. Начнем с вычисления реакций R_1 и R_2 (рис. I.4б). Уравнение равновесия (сумме моментов относительно точек A и B) имеет следующий вид:

$$\sum M_A = R_2 l - m = 0 \rightarrow R_2 = m/l ;$$

$$\sum M_B = R_1 l - m = 0 \rightarrow R_1 = m/2 .$$

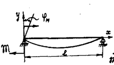


Рис. I.4а. Свободно опертая балка, загруженная на левой опоре моментом

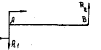


Рис. I.4б. Определение реакций R_1 и R_2

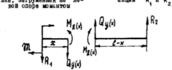


Рис. I.4в. Определение внутренних силовых факторов методом сечений

Балка имеет только один участок и в соответствии с методом сечений (рис. I.4в)

$$M_x(m,x) = m - \frac{mx}{l} .$$

Следовательно:

$$\frac{\partial M_x(m,x)}{\partial m} = 1 - \frac{x}{l}$$

и

$$\varphi_m = \int_0^l \frac{1}{EI_x}\left(m - \frac{mx}{l}\right)\left(1 - \frac{x}{l}\right) dx = \frac{m}{EI_x}\int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{m}{EI_x}\left[x - \frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{3l}\right]\Bigg|_0^l = \frac{ml}{3EI_x} .$$

П р и м е р I.I.5. Определить прогиб свободного *конца балки, представленной на рис. I.5.*

Р е ш е н и е. Для того чтобы избежать ошибки при решении этой задачи, нужно понимать, что производная должна вычисляться по силе, приложенной в точке, перемещение кото-

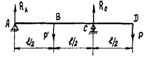


Рис.I.5. Схемы нагружения

рой подлежит определению. Поэтому силу, приложенную в точке B, обозначим P', в отличие от силы, приложенной в точке D. Определим реакции опор, составив уравнения моментов относительно опор A и B:

$$\sum M_A = -P'\frac{\ell}{2} + R_B\ell - P\frac{3\ell}{2} = 0 \rightarrow R_c = \frac{P'}{2} + \frac{3P}{2};$$

$$\sum M_C = R_A\ell + \frac{P\ell}{2} - \frac{P'\ell}{2} = 0 \longrightarrow R_A = -\frac{P}{2} - \frac{P'}{2}.$$

После этого можно приступать к составлению выражений для изгибающего момента и его производной по участкам (табл.I).

Таблица I

Участок	$M_x(x,P,P')$	$\dfrac{\partial M_x(x,P,P')}{\partial P}$
$0 \leqslant x \leqslant \ell/2$	$M_x(x,P,P') = \left(-\frac{P}{2} + \frac{P'}{2}\right)x$	$\frac{\partial M_x(x,P,P')}{\partial P} = -\frac{x}{2}$
$\frac{\ell}{2} \leqslant x \leqslant \ell$	$M_x(x,P,P') = R_A x - P'\left(x - \frac{\ell}{2}\right) = -\frac{P}{2}x - \frac{P'}{2}x + \frac{P'\ell}{2}$	$\frac{\partial M_x(x,P,P)}{\partial P} = -\frac{x}{2}$
$\ell \leqslant x \leqslant \frac{3\ell}{2}$	$M_x(x,P,P') = R_A x - P'(x - \ell/2) + R_c(x-\ell) = -P\left(\frac{3\ell}{2} - x\right)$	$\frac{\partial M_x(x,P,P')}{\partial P} = x - \frac{3\ell}{2}$

Таким образом:

$$\delta_D = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{EI_x}\left\{\int_0^{\ell/2}\left(-\frac{P}{2} + \frac{P'}{2}\right)x\left(-\frac{x}{2}\right)dx + \right.$$

$$\left. + \int_{\ell/2}^{\ell}\left(-\frac{P}{2}x - \frac{P'}{2}x + \frac{P'\ell}{2}\right)\left(-\frac{x}{2}\right)dx + \int_{\ell}^{3\ell/2}(-P)\left(\frac{3\ell}{2} - x\right)\left(x - \frac{3\ell}{2}\right)dx\right\}.$$

При вычислении интеграла нужно вспомнить, что $P = P'$ и

$$\delta_D = \frac{1}{EI_x}\left\{\int_{\ell/2}^{\ell}\left(Px - \frac{P\ell}{2}\right)\frac{x}{2}dx + \int_{\ell}^{3\ell/2}P\left(x - \frac{3\ell}{2}\right)^2 dx\right\} =$$

$$= \frac{1}{EI_x}\left\{\left(\frac{Px^3}{6} - \frac{P\ell x^2}{8}\right)\Bigg|_{\ell/2}^{\ell} + \left(\frac{Px^3}{3} - \frac{3Px^2\ell}{2} + \frac{9P\ell^2 x}{4}\right)\Bigg|_{\ell}^{3\ell/2}\right\} = \frac{P\ell^3}{24EI_x}.$$

Во всех представленных выше примерах определялись перемещения прямых стержней постоянного поперечного сечения. Как известно, перемещения таких конструкций можно определять и другими способами, изложенными в курсе. Однако возможности применения теоремы Кастильяно значительно шире. В частности, ее использование весьма эффективно при расчете деформаций кривых стержней.

П р и м е р I.I.6. Определить горизонтальное перемещение свободного конца полуциркульной арки, представленной на рис.I.6а.

Р е ш е н и е. Энергетические соображения, лежащие в основе формулировки теоремы Кастильяно, остаются справедливыми *безотносительно к форме стержня, в то время как* дифференциальное уравнение изгиба арки сильно отличается от уравнения изгиба прямого стержня. В примере I.I.3 было установ-

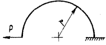


Рис.I.6а. Полуциркульная арка

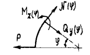


Рис.I.6б. Определение внутренних силовых факторов в арке методом сечений лено, что при изгибе допустимо пренебрежение вкладом в суммарное перемещение поперечной силы. То же относится и к продольной силе, поэтому мы с самого начала ограничимся учетом только энергии изгиба. Составим выражение для внутренних силовых факторов (рис. I.6б):

$$N(\varphi,P)=P\sin\varphi\,;\; Q_y(\varphi,P)=P\cos\varphi\,;\; M_x(\varphi,P)=Pr\sin\varphi.$$

В полярных координатах $dx=r\,d\varphi$, и формула (I.4) принимает вид

$$\delta_P=\int_0^{\pi}\frac{M_x(P,\varphi)}{EI_x}\,\frac{\partial M_x(P,\varphi)}{\partial P}\,r\,d\varphi=\int_0^{\pi}\frac{Pr\sin\varphi}{EI_x}\,r\sin\varphi\cdot r\,d\varphi=$$

$$=\frac{Pr^3}{EI_x}\int_0^{\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi=\frac{\pi}{2}\,\frac{Pr^3}{EI_x}.$$

I.2. Определение перемещений точек, в которых не приложены внешние силы

Определение перемещений при помощи теоремы Кастильяно, как можно было убедиться на примерах параграфа I.I, обладает тем очевидным недостатком, что дает возможность находить перемещения только точек приложения внешних сил и только в направлении этих сил. На практике возникает необходимость определять перемещения любых точек конструкции и в любом направлении. Для этого в точке, где нужно найти перемещение, прикладывается "фиктивная" равная нулю сила по направлению искомого перемещения. Поясним это на простейшем уже рассмотренном нами примере I.I.3. Пусть теперь нужно найти прогиб δ_B посередине балки (рис. I.7). Представим себе, что в этой точке приложена некоторая сила Φ так, как показано на рис. I.7. Величина ее может быть произвольной. Составляя в соответствии с методом сечений формулы для изгибающего момента, получим:

$$0\le x\le \ell/2\;:\; M_x(x,P,\Phi)=Px\,;$$

$$\ell/2\le x\le \ell\;:\; M_x(x,P,\Phi)=Px-\Phi(x-\ell/2).$$

Очевидно, что изгибающий момент M_x оказывается функцией не только координаты x и величины силы P, но и величины силы Φ. Воспользуемся теоремой Кастильяно для определения δ_B:

$$\delta_B=\frac{\partial U}{\partial\Phi}=\int_0^{\ell}\frac{M_x(x,P,\Phi)}{EI_x}\,\frac{\partial M_x(x,P,\Phi)}{\partial\Phi}\,dx.$$

при $0\le x<\ell/2$ $\dfrac{\partial M_x(x,P,\Phi)}{\partial\Phi}=0$, а при $\ell/2<x\le\ell$ $\dfrac{\partial M_x(x,P,\Phi)}{\partial\Phi}=-(x-\ell/2)$. Тогда

$$\delta_B(P,\Phi)=\int_0^{\ell/2}\frac{Px}{EI_x}\,0\,dx+\int_{\ell/2}^{\ell}\frac{Px-\Phi(x-\ell/2)}{EI_x}\Big[-(x-\ell/2)\Big]\,dx.$$

Ясно, что для любой пары значений P и Φ эта формула дает значение прогиба посередине балки. Нас интересует случай, когда $\Phi=0$, поэтому

$$\delta_B=-\int_{\ell/2}^{\ell}\frac{Px(x-\ell/2)}{EI_x}\,dx=-\frac{5P\ell^3}{48EI_x}.$$

Знак минус в полученной формуле свидетельствует о том, что точка перемещается в направлении, противоположном выбранному для силы Φ, изображенной на рис. I.7.

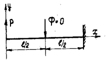


Рис. I.7. Определение перемещения при помощи фиктивной силы

Таким образом, становится очевидным "рецепт" определения перемещения в любой точке конструкции (заметим, что из него как частный случай следует непосредственное применение теоремы Кастильяно).

1. В той точке, где требуется определить обобщенное перемещение, по его направлению прикладывается фиктивная обобщенная сила.

2. Составляются формулы для внутренних силовых факторов с учетом фиктивной силы на всех участках, из которых состоит конструкция.

3. Вычисляются производные внутренних силовых факторов по фиктивной силе.

4. Вычисляется интеграл (I.4), когда фиктивная сила равна нулю.

П р и м е р I.2.1. Определить прогиб посередине пролета δ_B балки, представленной на рис.I.8.

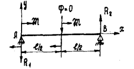


Рис.I.8. Определение перемещения при помощи фиктивной силы (к примеру I.2.1)

Р е ш е н и е. Приложим посередине пролета силу Ф. Для того чтобы составить формулы для изгибающего момента и его производной, найдем реакции опор с учетом силы Ф. Для этого составим уравнение моментов относительно точек A и B:

$$\sum M_A = -m - m - \Phi l/2 + R_2 l = 0 \longrightarrow R_2 = \frac{2m}{l} + \frac{\Phi}{2};$$

$$\sum M_B = -m - m + \Phi l/2 + R_1 l = 0 \longrightarrow R_1 = \frac{2m}{l} - \frac{\Phi}{2}.$$

После этого составим выражение для изгибающего момента и его производной по участкам (табл.2).

Таблица 2

Участок	$M_x(x, m, \Phi)$	$\dfrac{\partial M_x(x, m, \Phi)}{\partial \Phi}$
$0 \leqslant x \leqslant l/2$	$M_x(x,m,\Phi) = -R_1 x + m = m(1 - \frac{2x}{l}) + \frac{\Phi x}{2}$	$\dfrac{\partial M_x(x,m,\Phi)}{\partial \Phi} = \dfrac{x}{2}$
$l/2 \leqslant x \leqslant l$	$M_x(x,m,\Phi) = -R_1 x + m + m - \Phi(x - l/2) = 2m(1 - x/l) - \Phi/2(x-l)$	$\dfrac{\partial M_x(x,m,\Phi)}{\partial \Phi} = -\dfrac{x-l}{2}$

Вычислим интеграл (I.4), положив $\Phi = 0$:

$$\delta_B = \frac{1}{EI_x}\left\{\int_0^{l/2} m(1-\frac{2x}{l})\frac{x}{2}dx + \int_{l/2}^{l} l m(1-\frac{x}{l})^2 dx\right\} =$$

$$= \frac{m}{EI_x}\left\{\frac{x^2}{4}\Big|_0^{l/2} - \frac{x^3}{3l}\Big|_0^{l/2} + (x\Big|_{l/2}^{l} - \frac{x^2}{l}\Big|_{l/2}^{l} + \frac{x^3}{3l^2}\Big|_{l/2}^{l})l\right\} = \frac{ml^2}{16EI_x}.$$

П р и м е р I.2.2. Определить угол поворота свободного конца кривого стержня, представленного на рис.I.9.

Р е ш е н и е. Приложим на свободном конце момент Ф и составим формулы для изгибающего момента и его производной по участкам (табл.3).

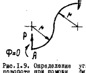


Рис.I.9. Определение угла поворота при помощи фиктивного момента

Таблица 3

Участок	$M_x(\varphi, \Phi, P)$	$\dfrac{\partial M_x(\varphi, \Phi, P)}{\partial \Phi}$
$0 < \varphi_1 < \frac{\pi}{2}$	$M_x(\varphi_1, \Phi, P) = \Phi + Pr\sin\varphi_1$	$\dfrac{\partial M_x(\varphi_1, \Phi, P)}{\partial \Phi} = 1$
$0 < \varphi_2 < \frac{\pi}{2}$	$M_x(\varphi_2, \Phi, P) = \Phi + P\left[r + r(1-\cos\varphi_2)\right]$	$\dfrac{\partial M_x(\varphi_2, \Phi, P)}{\partial \Phi} = 1$

Вычислим интеграл (I.4), положив $\Phi = 0$:

$$\theta_A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Pr\sin\varphi_1}{EI_x} 1\, r d\varphi_1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{P(2r - r\cos\varphi_2)}{EI_x} 1\, r d\varphi_2 =$$

$$= \frac{Pr^2}{EI_x} + \frac{\pi Pr^2}{EI_x} - \frac{Pr^2}{EI_x} = \frac{\pi Pr^2}{EI_x}.$$

П р и м е р I.2.3. Определить горизонтальное перемещение точки A (рис.I.10а).

Р е ш е н и е. Приложим в точке A фиктивную силу Ф и определим реакции опор с учетом ее действия. Для этого составим три уравнения равновесия:

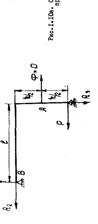


Рис.I.10а. Определение перемещения точки A при помощи фиктивной силы (к примеру I.2.3)

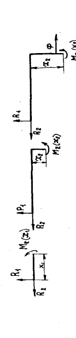


Рис.I.10б. Использование метода сечений для вычисления $M_z(x_1)$ и $M_z(x_2)$

$$\sum M_B = \Phi\frac{h}{2} - Ph - R_3\ell = 0 \;\rightarrow\; R_3 = \frac{h}{\ell}\left(\frac{\Phi}{2} - P\right);$$

$$\sum x_1 = \Phi - R_2 - P = 0 \;\rightarrow\; R_2 = \Phi - P;$$

$$\sum x_2 = R_1 - R_3 = 0 \;\rightarrow\; R_1 = \frac{h}{\ell}\left(\frac{\Phi}{2} - P\right).$$

Теперь составим выражение для изгибающего момента и его производной (рис.I.10б) по участкам (табл.4).

Таблица 4

Участок	$M_z(x, P, \Phi)$	$\frac{\partial M_z(x,P,\Phi)}{\partial \Phi}$
$0 \le x_1 \le \ell$	$M_z(x_1,P,\Phi) = R_1 x_1 = \frac{h}{\ell}\left(\frac{\Phi}{2} - P\right)x_1$	$\frac{\partial M_z(x_1,P,\Phi)}{\partial \Phi} = \frac{x_1 h}{\ell}$
$0 \le x_2 \le h/2$	$M_z(x_2,P,\Phi) = R_1\ell - R_2 x_2 = \frac{h}{\ell}\left(\frac{\Phi}{2} - P\right)\ell - (\Phi - P)x_2$	$\frac{\partial M_z(x_2,P,\Phi)}{\partial \Phi} = \frac{h}{2} - x_2$
$\frac{h}{2} \le x_2 \le h$	$M_z(x_2,P,\Phi) = R_1\ell - R_2 x_2 + \Phi\left(x_2 - \frac{h}{2}\right) = -P(h - x_2)$	$\frac{\partial M_z(x_2,P,\Phi)}{\partial \Phi} = 0$

Формула для определения перемещения δ_A примет вид

$$\delta_A = \frac{1}{EI_z}\left\{\int_0^{\ell}\left(-\frac{Phx_1}{\ell}\right)\frac{hx_1}{\ell}\,dx_1 + \int_0^{h/2}(-Ph + Px_2)\left(\frac{h}{2} - x_2\right)dx_2 + \int_{h/2}^{h}\left[-P(h - x_2)\right]0\,dx_2 = \right.$$

$$= \frac{1}{EI_z}\left\{-\left(\frac{h}{\ell}\right)^2\frac{P}{2}\int_0^{\ell}x_1^2\,dx_1 - \frac{h^2}{2}P\int_0^{h/2}dx_2 + \frac{3Ph}{2}\int_0^{h/2}x_2\,dx_2 - P\int_0^{h/2}x_2^2\,dx_2\right\} =$$

$$= \frac{1}{EI_z}\left\{-\frac{Ph^2\ell}{6} - \frac{Ph^3}{4} + \frac{3Ph^3}{16} - \frac{Ph^3}{24}\right\} = -\frac{Ph^3}{48EI_z}\left(8\frac{\ell}{h} + 5\right).$$

Перемещение получилось со знаком минус. Это означает, что точка A под действием силы P перемещается в направлении, противоположном выбранному на рис.I.10а для силы Φ.

I.3. Интеграл Мора

Обратимся еще раз к определению перемещений точек, в которых не приложены внешние обобщенные силы. Мы установили, что

$$\delta_\Phi = \int_{(l)} \frac{M_z(P,\Phi,x)}{EI_z} \left. \frac{\partial M_z(P,\Phi,x)}{\partial \Phi} \right|_{\Phi=0} dx \; .$$

В соответствии с принципом независимости действия сил можно написать

$$M_z(P,\Phi,x) = M_z(P,x) + M_z(\Phi,x) \, ,$$

где $M_z(P,x)$ - момент от действия всех внешних обобщенных сил, приложенных к конструкции; $M_z(\Phi,x)$ - момент от фиктивной обобщенной силы. В свою очередь момент фиктивной силы пропорционален ее величине:

$$M_z(\Phi,x) = M_{z1}(x)\Phi \, .$$

Физический смысл функции $M_{z1}(x)$ очевиден: если загрузить конструкцию в той точке, где требуется найти перемещение, только единичной силой, то эта функция будет давать значение изгибающего момента от действия силы во всех сечениях конструкции.

Таким образом, мы получили

$$M_z(P,\Phi,x) = M_z(P,x) + M_{z1}(x)\Phi \; .$$

Соответственно:

$$\frac{\partial M_z(P,\Phi,x)}{\partial \Phi} = M_{z1}(x)$$

при всех значениях силы Φ, в том числе и при $\Phi = 0$. В этом последнем случае имеем

$$\delta_\Phi = \int_{(l)} \frac{M_z(P,x)\, M_{z1}(x)}{EI_z} \, dx \, .$$

Полученная формула представляет собой интеграл Мора, выведенный для учета только энергии деформации изгиба в одной из главных плоскостей инерции. При необходимости учета остальных пяти силовых факторов (N, Q_y, Q_z, M_x, M_y) эта формула пополняется соответствующими слагаемыми, структура и способ вывода которых идентичны вышеизложенным.

Мы ограничимся учетом только энергии деформации изгиба. Порядок использования интеграла Мора состоит в следующем.

1. В той точке, где требуется определить обобщенное перемещение, по его направлению прикладывается единичная обобщенная сила.

2. Составляются формулы для внутренних силовых факторов от действия только единичной обобщенной силы на всех участках, из которых состоит конструкция.

3. Составляются формулы для внутренних силовых факторов от действия всех внешних сил, приложенных к конструкции на каждом ее участке.

4. Вычисляется интеграл (I.5).

Фактически использование интеграла Мора предусматривает решение двух задач: расчета "грузового" состояния конструкции (под действием всех внешних сил) и расчета конструкции при нагружении единичной силой. Поясним это на простейшем уже дважды рассмотренном нами примере I.I.3. Пусть нужно найти прогиб δ_B посередине балки (см.рис.I.7), используя интеграл Мора. Рассмотрим "грузовое" состояние (рис.I.11а), получим

$$0 \le x \le l : \qquad M_z(P,x) = Px \, .$$

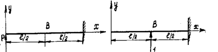


Рис.I.11. "Грузовое" состояние (а) и нагружение единичной силой (б)

При нагружении единичной силой (рис.I.IIб)

$$0 \le x \le \ell/2: \qquad M_{z1}(x) = 0;$$
$$\ell/2 \le x \le \ell: \qquad M_{z1}(x) = 1\,(x - \ell/2).$$

Подставляя эти формулы в интеграл Мора (I.5), получим:

$$\delta_B = \frac{1}{EI_z}\left\{\int_0^{\ell/2} Px\cdot 0\,dx + \int_{\ell/2}^{\ell} Px\cdot 1\,(x-\ell/2)\,dx\right\} = \frac{5P\ell^3}{48EI_z}.$$

П р и м е р I.3.I. Определить при помощи интеграла Мора прогиб балки, представленной на рис.I.I2а, в точке A. Поперечное сечение представляет собой двутавр № 27, $\ell = 3$ м, $q = 10$ кН/м, материал балки – сталь, $E = 2\cdot 10^5$ МПа.

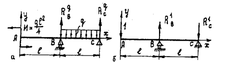


Рис.I.I2. "Грузовое" состояние (а) и нагружение единичной силой (б) (к примеру I.3.I)

Р е ш е н и е. Чтобы исключить арифметические ошибки, выполним расчеты в общем виде, подставив заданные числовые значения в окончательную формулу для δ_A. Вначале рассмотрим балку, загруженную только единичной силой в точке A (рис.I.I2б). Составляя уравнение равновесия, определим реакции:

$$\sum M_B = 1\,\ell - R'_C\,\ell = 0 \;\rightarrow\; R'_C = 1;$$
$$\sum M_C = 1\,2\ell - R'_B\,\ell = 0 \;\rightarrow\; R'_B = 2.$$

Выражения для изгибающего момента от действия единичной силы по участкам представлены в табл.5. Обратимся к расчету "грузового" состояния (рис.I.I2а). Реакции в этом состоянии найдем из уравнений

$$\sum M_B = \frac{q\ell^2}{4} - \frac{q\ell^2}{2} + R_C^q\,\ell = 0 \;\rightarrow\; R_C^q = \frac{q\ell}{4};$$
$$\sum M_C = \frac{q\ell^2}{4} + \frac{q\ell^2}{2} - R_B^q\,\ell = 0 \;\rightarrow\; R_B^q = \frac{3q\ell}{4}.$$

Выражения для изгибающего момента в "грузовом" состоянии по участкам представлены в табл.5.

Таблица 5

Участок	$M_z(P,x)$	$M_{z1}(x)$
$0 \le x \le \ell$	$M_z(P,x) = -\frac{q\ell^2}{4}$	$M_{z1}(x) = -1\cdot x$
$\ell \le x \le 2\ell$	$M_z(P,x) = -\frac{q\ell^2}{4} + R_B^q(x-\ell) - \frac{q(x-\ell)^2}{2} = -\frac{q\ell^2}{4} + \frac{3q\ell(x-\ell)}{4} - \frac{q(x-\ell)^2}{2}$	$M_{z1}(x) = -1x + R'_B(x-\ell) = -1\,x + 2(x-\ell)$

Подставляя эти формулы в интеграл Мора (I.5), получим

$$\delta_A = \frac{1}{EI_z}\left\{\int_0^{\ell}\left(-\frac{q\ell^2}{4}\right)(-1\cdot x)\,dx + \int_{\ell}^{2\ell}\left[-\frac{q\ell^2}{4} + \frac{3q\ell(x-\ell)}{4} - \frac{q(x-\ell)^2}{2}\right]\left[-1\,x + 2(x-\ell)\right]dx\right\} =$$
$$= \frac{1}{EI_z}\left\{\frac{q\ell^2}{4}\int_0^{\ell} x\,dx - \frac{q\ell}{4}\int_{\ell}^{2\ell}(2\ell - x)^2\,dx + \frac{q}{2}\int_{\ell}^{2\ell}(2\ell - x)^3\,dx\right\} = \frac{1}{EI_z}\left[\frac{q\ell^4}{8} - \frac{q\ell^4}{12} + \frac{q\ell^4}{8}\right] = \frac{q\ell^4}{6EI_z}.$$

Теперь воспользуемся заданными числовыми значениями (из сортамента $I_z = 5010$ см^4), получим

$$\delta_A = \frac{10\cdot 10^3\,\frac{H}{м}\cdot 81\,м^4}{6\cdot 2\cdot 10^{11}\,\frac{H}{м^2}\cdot 5010\cdot 10^{-8}\,м^4} = \frac{81}{12\cdot 5{,}01}\,10^{-2}\,м = 1{,}34\,см.$$

П р и м е р I.3.2. Определить при помощи интеграла Мора угол свободного конца шлифбалки, изображенной на рис.I.I3а, считая $P = 1{,}5$ кН, $\ell = 3$ м, $r = 2$ м. На прямолинейном участке поперечное сечение представляет собой трубу с внешним диаметром $D = 8$ см и внутренним $d = 6$ см. На криволинейном участке поперечное сечение – круг $d = 6$ см. Материал шлюпбалки – сталь, $E = 2\cdot 10^5$ МПа.

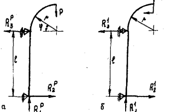


Рис.I.I3. "Грузовое" состояние (а) и нагружение единичным моментом (б) (к примеру I.3.2)

Р е ш е н и е. Рассмотрим шпилбалку, загруженную только единичным моментом в точке A (рис.I.I3б). Реакции опор, очевидно, будут

$$R_1' = 0\ ; \qquad R_2' = R_3' = \frac{1}{\ell}\ .$$

Выражение для изгибающего момента от действия единичного момента по участкам представлены в табл.6.

Рассмотрим "грузовое" состояние, в этом случае реакции опор будут иметь вид

$$R_1^P = P\ ; \qquad R_2^P = R_3^P = \frac{Pr}{\ell}\ .$$

Выражение для изгибающего момента в "грузовом" состоянии по участкам также представлены в табл.6.

Таблица 6

Участок	$M_z(P, x)$	$M_{z1}(x)$
$0 \le x \le \ell$	$M_z(P,x) = R_2^P x = \frac{Pr}{\ell} x$	$M_{z1}(x) = R_2' x = \frac{x}{\ell}$
$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$	$M_z(P,\varphi) = Pr \sin\varphi$	$M_{z1}(\varphi) = 1$

Воспользовавшись интегралом Мора (I.5), получим

$$\Theta_A = \frac{1}{EI_1}\int_0^{\ell} \frac{Pr}{\ell} x \frac{x}{\ell}\, dx + \frac{1}{EI_2}\int_0^{\pi/2} Pr \sin\varphi\ 1\ r d\varphi = \frac{Pr\ell}{3EI_1} + \frac{Pr^2}{EI_2}\ .$$

Чтобы получить численное значение Θ_A, нужно определить I_1 и I_2.

Для трубчатого поперечного сечения

$$I_1 = \frac{\pi D^4}{64}\left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right] = 137\ \text{см}^4.$$

Для круглого поперечного сечения

$$I_2 = \frac{\pi D^4}{64} = 64\ \text{см}^4.$$

Таким образом:

$$\Theta_A = \frac{Pr^2}{EI_2}\left(1 + \frac{1}{3}\frac{\ell}{r}\frac{I_2}{I_1}\right) = \frac{1{,}5\cdot 10^3 H \cdot 4 м^2}{2\cdot 10^{11}\frac{H}{м^2}\, 64\cdot 10^{-8} м^4}\left(1 + \frac{1}{3}\frac{3м}{2м}\frac{64 см^4}{137 см^4}\right) =$$

$$= \frac{6}{128}\left(1 + \frac{32}{137}\right) = 0{,}058\ рад = 3{,}33^{\circ}.$$

П р и м е р I.3.3. Определить при помощи интеграла Мора взаимное перемещение концов разрезанного кольца (рис.I.I4).

Р е ш е н и е. В "грузовом" состоянии выражение для изгибающего момента в любом поперечном сечении имеет вид

$$M_z(P, \varphi) = Pr \sin\varphi\ .$$

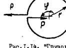


Рис.I.I4. "Грузовое" состояние (к примеру I.3.3)

Загрузка кольца единичной силой сводится к замене ею силы P, и выражение для изгибающего момента будет иметь вид

$$M_{1z}(\varphi) = 1\ r \sin\varphi\ .$$

В результате получим

$$\delta_P = \frac{1}{EI_z}\int_0^{2\pi} Pr \sin\varphi\ 1\ r^2 \sin\varphi\, d\varphi = \frac{Pr^3}{EI_z}\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi = \frac{\pi Pr^3}{EI_z}\ .$$

Полезно сопоставить этот результат с результатом в примера I.I.6. Поскольку в примере I.I.6 рассмотрена половина кольца, величина полученного там перемещения в два раза меньше, чем в рассмотренном здесь примере.

I.4. Способ Верещагина

В примерах, представленных в параграфе I.3, довольно трудоемкой операцией было вычисление определенных интегралов. Конечно, использование современной вычислительной техники и разнообразных стандартных программ вычисления интегралов позволяет полностью автоматизировать эту процедуру. Тем не менее до сих пор не потерял актуальность графоаналитический способ вычисления интеграла Мора, предложенный в 1925 г. студентом Московского института инженеров транспорта А.К.Верещагиным. Этот способ пригоден для вычисления интеграла по прямолинейному отрезку произведения двух функций, одна из которых является линейной.

Суть способа состоит в том, что для вычисления интеграла

$$\int_{\alpha}^{\beta} f_1(x) f_2(x)\,dx\,,$$

где одна из функций, скажем, $f_2(x)$, является линейной ($f_2(x) = ax+b$), достаточно знать величину $\Omega_1 = \int_{\alpha}^{\beta} f_1(x)\,dx$, представляющую собой площадь фигуры, ограниченной отрезками прямых $x=\alpha$, $y=0$, $x=\beta$ и кривой $y=f_1(x)$, а также абсциссу центра тяжести этой фигуры x_1^c (рис.I.15). Тогда

$$\int_{\alpha}^{\beta} f_1(x) f_2(x)\,dx = \Omega_1 f_2(x_1^c)\,. \qquad (I.6)$$

Практическая ценность этого способа состоит в том, что в интеграле Мора при определении перемещений и углов поворота один из сомножителей (функция $M_{1z}(x)$) всегда является линейной функцией, а интеграл от "грузового" момента $M_z(P,x)$ вычисляется достаточно просто. Таким образом, оказывается, что графоаналитическое вычисление интеграла Мора более рационально, чем чисто аналитическое.

П р и м е р I.4.I. *Определить способом Верещагина* прогиб на конце консольной балки (рис.I.16а).

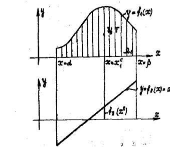


Рис.I.15 Способ Верещагина $\int_{\alpha} f_1(x) f_2(x)\,dx$

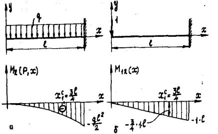


Рис.I.16. "Грузовое" состояние (а) и нагружение единичной силой (б) (к примеру I.4.I)

Р е ш е н и е. Площадь эпюры изгибающих моментов $M_z(x,P)$ от действия внешней нагрузки q на рассматриваемом участке вычисляется по формуле $\Omega_1=\frac{1}{3}\ell\left(-\frac{q\ell^2}{2}\right)=-\frac{q\ell^3}{6}$ (параболический треугольник). Центр тяжести параболического треугольника находится на расстоянии $\frac{3}{4}\ell$ от его вершины, т.е. $x_1^c=\frac{3}{4}\ell$.

На рис.I.16б представлены схема нагружения балки единичной силой и эпюра моментов от действия этой силы $M_{1z}(x)$, которая является линейной. Величина ординаты $f_2(x_1^c)$ вычисляется так:

$$f_2(x_1^c)=M_{1z}(x_1^c)=-\frac{3}{4}1\cdot\ell .$$

Тогда искомый прогиб

$$\delta_A=\frac{1}{EI_z}\left(-\frac{q\ell^3}{6}\right)\left(-\frac{3}{4}1\cdot\ell\right)=\frac{q\ell^4}{8EI_z}.$$

П р и м е р I.4.2. Определить способом Верещагина прогиб балки (рис.I.17а) в точке A.

Р е ш е н и е. На рис.I.17а построена эпюра изгибающих моментов в "грузовом" состоянии балки. На рис.I.17б показаны нагружение балки единичной силой и эпюра изгибающих моментов от ее действия.

Поскольку на консольных участках момент $M_{1z}(x)$ тождественно равен нулю, интеграл Мора на этом участке тоже равен нулю. В пролете обе функции являются линейными. Однако

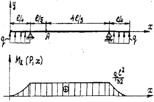


Рис.I.17а. "Грузовое" состояние

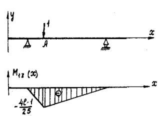


Рис.I.17б. Нагружение единичной силой

если функция $M_z(P,x)$ непрерывна, то функция $M_{1z}(x)$ имеет скачок производной в точке A. Если в качестве функции $f_1(x)$ (см.формулу (I.6)) взять $M_{1z}(x)$, то можно записать интеграл Мора в виде *одного слагаемого*. *Если же в качестве* $f_1(x)$ взять $M_z(P,x)$, то использовать способ Верещагина нужно на двух участках (слева и справа от точки A) по отдельности. Дело в том, что условием применимости способа Верещагина является непрерывность функции $f_2(x)$ вместе со своей производной на всем интервале интегрирования.

В данном случае удобнее принять

$$f_1(x)=M_{1z}(x), \qquad f_2(x)=M_z(P,x).$$

Тогда

$$\Omega_1=-\frac{1}{2}\ell\,\frac{4\ell\cdot 1}{25}=-\frac{\ell^2}{50},$$

а

$$f_2(x)=M_z(P,x)=\frac{q\ell^2}{32}$$

во всех точках пролета.

В результате подстановки в (I.6) получим:

$$\delta_A=\frac{1}{EI_z}\Omega_1 f_2(x_1^c)=\frac{1}{EI_z}\frac{q\ell^2}{32}\left(-\frac{\ell^2}{50}\right)=-\frac{q\ell^4}{1600EI_z}.$$

Знак минус свидетельствует о том, что перемещение происходит в направлении, противоположном выбранному для единичной силы на рис.I.17б.

Можно не приписывать знаки ординатам эпюр $M_{1z}(x)$ и $M_z(P,x)$, а лишь следить за тем, по одну или по разные стороны от оси балки эти эпюры расположены. В первом случае произведение будет положительным, во втором – отрицательным. Это особенно удобно при рассмотрении рам, составленных из прямолинейных участков.

П р и м е р I.4.3. Определить горизонтальное перемещение точки A рамы (рис.I.18а), если $q = 1{,}0$ кН/м, $\ell = 2$ м, $H = 3$ м, $E = 2\cdot 10^5$ МПа, поперечное сечение рамы постоянно и представляет собой прямоугольник с $b = 6$ см, $h = 8$ см.

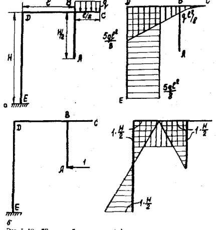


Рис.I.18. "Грузовое" состояние (а) и нагружение единичной силой (б) (к примеру I.4.3)

Р е ш е н и е. На рис.I.18а построена эпюра изгибающих моментов в "грузовом" состоянии рамы, а на рис.I.18б – схема нагружения рамы единичной силой и эпюра изгибающих моментов от ее действия. Обе эпюры построены на сжатых волокнах.

Очевидно, что на участках AB и BC интеграл Мора равен нулю. На участках BD и DE любую функцию $(M_{1z}(x))$ и $(M_z(P,x))$ можно выбрать в качестве $f_2(x)$, так как обе линейны (см.(I.6)). На участке BD легче за $f_1(x)$ принять $M_{1z}(x)$, так как площадь Ω_1 и абсцисса центра тяжести x_1^c для прямоугольника определяются проще, чем для трапеции. На участке DE удобнее в качестве $f_1(x)$ выбрать $M_z(P,x)$, поскольку значение функции $f_2(x)$ в центре тяжести $x_1^c = \frac{H}{2}$ равно нулю:

$$f_2(x_1^c) = M_{1z}\left(\frac{H}{2}\right) = 0.$$

Таким образом, получается

$$\delta_A = \frac{1}{EI_z}\,\frac{3}{8}\,q\ell^2\,\ell\cdot\frac{H}{2} = \frac{3q\ell^3 H}{16EI_z}.$$

Здесь учтено, что площадь Ω_1 эпюры $M_{1z}(x)$ на участке BD равна $1\cdot\frac{\ell H}{2}$, ее центр тяжести лежит посередине пролета $x_1^c = \frac{\ell}{4}$, а $f_2(x_1^c) = M_z(P,\frac{\ell}{4}) = \frac{1}{2}\left(\frac{5q\ell^2}{8} + \frac{q\ell^2}{8}\right) = \frac{3q\ell^2}{8}$.

Момент инерции прямоугольника, как известно, равен: $I_z = \frac{bh^3}{12}$.

Тогда, подставляя численные значения, имеем

$$\delta_A = \frac{3\cdot 1{,}0\cdot 10^3\,\frac{H}{M}\cdot 8M^3\cdot 3M}{16\cdot 2\cdot 10^{11}\,\frac{H}{M^2}\,\frac{6\cdot 8^3}{12}\,10^{-8}\,M^4} = \frac{9}{16\cdot 64}\,M = 0{,}88\ \text{см}.$$

П р и м е р I.4.4. Определить вертикальное перемещение точки A рамы (рис.I.19а).

Р е ш е н и е. Для того чтобы построить эпюру изгибающих моментов в каждом из состояний, представленных на рис.I.19а, нужно определить реакции опор.

В "грузовом" состоянии

$$\sum M_D = -\mathfrak{M} + R_1^{\mathfrak{M}}\,2a = 0 \longrightarrow R_1^{\mathfrak{M}} = \frac{\mathfrak{M}}{2a}.$$

Уравнения равновесия в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси дают

$$R_2^{m} = R_1^{m} = \frac{m}{2a}; \qquad R_3^{m} = 0.$$

При нагружении единичной силой

$$\Sigma M_D = -1 \cdot a + R_1' \, 2a = 0; \quad R_1' = 1/2 \quad \text{и} \quad R_2' = R_1' = 1/2, \quad R_3' = 1.$$

Теперь построение эпюр (см.рис.I.19,а и I.19,б) становится очевидным.

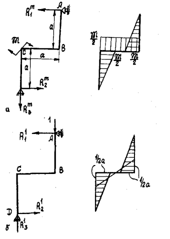


Рис.I.19. "Грузовое" состояние (а) и нагружение единичной силой (б) (к примеру I.4.4)

На участке CB интеграл Мора будет равен нулю, так как если выбрать в качестве $f_1(x)$ функцию $M_z(P,x)$ а в качестве $f_2(x)$ функцию $M_{1z}(x)$, то значение $f_2(x_1^c)$ равно нулю (так же, как на участке DE, пример I.4.3). Интегралы Мора, вычисленные на участках AB и CD, будут равны между собой. На этих участках совершенно безразлично, какую функцию выбирать в качестве $f_1(x)$, а какую в качестве $f_2(x)$. Пусть $f_1(x) = M_{1z}(x)$. Тогда $\Omega_1 = \frac{1}{2} a \, \frac{1}{2} a = a^2/4$. Абсцисса центра тяжести треугольника $x_1^c = 2a/3$ и $f_2(x_1^c) = M_z(P, x_1^c) = m/3$.

В результате

$$\delta_A = \frac{2}{EI_z} \frac{a^2}{4} \frac{m}{3} = \frac{m a^2}{6EI_z}.$$

2. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ

В начальных разделах курса рассматриваются так называемые элементарные деформации стержня: осевая деформация, свободное кручение и плоский поперечный изгиб. Из шести возможных внутренних силовых факторов (см.рис.I.Iа и I.Iб) в поперечных сечениях стержней в первом случае возникает только продольная сила N, во втором - крутящий момент M_x, а в третьем - либо комбинация изгибающего момента M_z и поперечной силы Q_y, либо комбинация M_y и Q_z. Работу стержней, в поперечных сечениях которых возникают иные, по сравнению с приведенными выше, комбинации силовых факторов, называют сложным сопротивлением. В некоторых случаях возможно возникновение всех шести усилий - N, Q_y, Q_z, M_x, M_y и M_z.

В этой главе рассматриваются примеры решения задач по определению напряжений и перемещений при сложном сопротивлении стержней. Считаем, что стержни имеют достаточно большую жесткость, при которой перемещения точек оси малы по сравнению с поперечными размерами, а углы поворота сечений малы по сравнению с единицей. Материал стержня подчиняется закону Гука. При выполнении указанных условий применим принцип независимости действия сил, т.е. пренебрегаем взаимным влиянием отдельных факторов. Это означает, что могут быть использованы формулы теории элементарных деформаций стержня с прямолинейной осью. Величины деформаций, перемещений или напряжений можно находить алгебраическим суммированием соответствующих величин, рассчитанных в исследуемой точке по отдельности от действия каждого силового фактора.

2.1. Косой изгиб

Косой изгиб наблюдается в тех случаях, когда плоскость изгибающего момента (плоскость действия нагрузок) не совпадает с главной осью сечения. Осевое растяжение (сжатие) и кручение отсутствуют. Косой изгиб может рассматриваться как сочетание двух плоских изгибов в главных плоскостях xy и xz (рис. 2.1).

Нейтральная линия проходит через центр тяжести сечения, но не перпендикулярна плоскости действия нагрузок (рис. 2.2). Положение ее определяется по формуле

$$tg\beta = \frac{J_z}{J_y} tg\alpha , \qquad (2.1)$$

где α - угол наклона плоскости действия изгибающего момента к главной центральной оси y; β - угол, образуемый нейтральной линией с другой главной осью сечения z; J_z, J_y - главные центральные моменты инерции сечения.

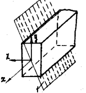


Рис. 2.1. Косой изгиб балки: I - плоскость действия сил

Изогнутая ось лежит в плоскости, перпендикулярной нейтральной плоскости, и составляет с осью y угол, равный β.

В соответствии с принятым ранее правилом знаков положительными считаются изгибающие моменты, при которых в точках сечения с положительными значениями координат возникают сжимающие, т.е. отрицательные напряжения. Поэтому формула для определения при косом изгибе нормальных напряжений в произвольной точке сечения с координатами y и z имеет вид

$$\sigma = -\left(\frac{M_y}{J_y} z + \frac{M_z}{J_z} y\right) . \qquad (2.2)$$

Если M - значение изгибающего момента в произвольном сечении, лежащего в плоскости действия сил, то $M_y = M\sin\alpha$, $M_z = M\cos\alpha$. С учетом этого

$$\sigma = -M\left(\frac{\sin\alpha}{J_y} z + \frac{\cos\alpha}{J_z} y\right) . \qquad (2.3)$$

Наибольшие напряжения возникают в точках сечения, наиболее удаленных от нейтральной линии. В подавляющем большинстве случаев при решении практических задач форма сечения балки позволяет легко определить положение этих точек. Формула для наибольших напряжений имеет вид

$$\sigma_{max/min} = \pm\left(\frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z}\right) , \qquad (2.4)$$

где W_y, W_z - моменты сопротивления сечения.

Условием прочности будет выполнение неравенства

$$\frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z} \leq [\sigma] . \qquad (2.5)$$

Ниже рассмотрены примеры решения задач при косом изгибе.

Пример 2.1.1. Определить величину угла отклонения плоскости изгиба, если плоскость действия сил составляет с плоскостью наибольшей жесткости угол, равный 1°. Сечение балки прямоугольное. Рассмотреть варианты с $h/b = 5$ и $h/b = 10$.

Решение. В соответствии с рис. 2.2 $\alpha = 1^\circ$. Искомый угол β рассчитывается по формуле (2.1).

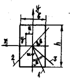


Рис. 2.2. Взаимное расположение следа плоскости действия сил (1), следа нейтральной плоскости (2) и следа плоскости изгиба (3)

Так как для прямоугольника $J_z = bh^3/12$, а $J_y = hb^3/12$, имеем

$$tg\beta = \frac{J_z}{J_y} tg\alpha = \frac{bh^3}{12}\,\frac{12}{hb^3}\, tg\alpha = \frac{h^2}{b^2} tg\alpha ; \quad tg 1^\circ = 0{,}0175 ;$$

при $h/b = 5$ $\quad tg\beta = 25 \cdot 0{,}0175 = 0{,}4375 ; \quad \beta = 23^\circ 36' ;$

при $h/b = 10$ $\quad tg\beta = 100 \cdot 0{,}0175 = 1{,}7500 ; \quad \beta = 60^\circ 15' .$

Очевидно, что чем больше отличаются друг от друга главные моменты инерции сечения балки, тем она чувствительнее к неточному по отношению к главной плоскости приложению нагрузки. Можно доказать, что это относится только к изгибу в плоскости наибольшей жесткости.

П р и м е р 2.I.2. Определить степень увеличения наибольших нормальных напряжений в балке двутаврового сечения № 70, если по проекту она должна работать на изгиб в вертикальной плоскости при строго вертикальном положении двутавра, а из-за неточного монтажа стенка его приобрела наклон, определяемый углом, равным $1°30'$.

Р е ш е н и е. Из сортамента для двутавра № 70 $W_z = 3840$ см^3, $W_y = 260$ см^3. При точной установке балки наибольшее нормальное напряжение будет равно $\sigma_{max} = M_{max}/W_z$. Для наклонного положения из формул (2.3) и (2.4) следует

$$\sigma_{max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} = M_{max}\left(\frac{\cos\alpha}{W_z} + \frac{\sin\alpha}{W_y}\right) = \frac{M_{max}}{W_z}\left(\cos\alpha + \frac{W_z}{W_y}\sin\alpha\right);$$

$$\cos 1°30' = 0{,}9997; \quad \sin 1°30' = 0{,}0262; \quad \frac{W_z}{W_y} = \frac{3840}{260} = 14{,}77;$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_z}(0{,}9997 + 14{,}77 \cdot 0{,}0262) = 1{,}387\,\frac{M_{max}}{W_z}.$$

Таким образом, ошибка в установке, при которой балка получила наклон всего $1{,}5°$, *привела к увеличению напряжений на 38,7%.*

П р и м е р 2.I.3. Тавровая сварная из двух одинаковых стальных полос сечением 20X120 мм балка нагружена вертикальной силой. Сечение имеет наклон $30°$ к вертикали (рис.2.3). Определить в опасном сечении наибольшее по абсолютной величине нормальное напряжение, положение нейтральной оси, значения полного f, вертикального $f_в$ и горизонтального $f_г$ прогибов. Модуль Юнга $E = 2\cdot 10^5$ МПа.

Р е ш е н и е. Вначале определяем величины геометрических характеристик сечения. Для удобства размеры сечения представляем в сантиметрах. Поскольку площади прямоугольников, из которых составлено сечение, одинаковые, центр тяжести фигуры находится посередине отрезка длиной 7 см, соединяющего центры тяжести этих прямоугольников (рис.2.3,б). Вычисляем моменты инерции относительно главных центральных осей:

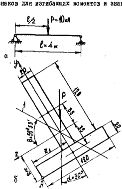
$$J_y = \frac{12\cdot 2^3}{12} + \frac{2\cdot 12^3}{12} = 296 \text{ см}^4;$$

$$J_z = \frac{2\cdot 12^3}{12} + 3{,}5^2\cdot 24 + \frac{12\cdot 2^3}{12} + 3{,}5^2\cdot 24 = 884 \text{ см}^4.$$

По формуле (2.I) определяем положение нейтральной линии:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{J_z}{J_y}\operatorname{tg}\alpha = \frac{884}{296}\operatorname{tg}30° = 1{,}7242; \qquad \beta = 59°53'.$$

Опасным является сечение под силой P, в котором действует изгибающий момент $M_{max} = Pl/4 = 10\cdot 4/4 = 10$ кН·м. Для выявления точки, в которой будет действовать σ_{max}, на чертеже проводим нейтральную линию, после чего становится очевидным, что этой точкой будет точка A, наиболее удаленная от нейтральной линии. Также очевидно, что напряжения в этой точке будут растягивающими. Поэтому при определении σ_{max} по формуле (2.3) можно пренебречь формальными правилами знаков для изгибающих моментов и знаками координат расчет-



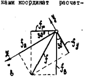


Рис.2.3.К примеру 2.I.3: а – схема балки; б – сечение балки; I – нейтральная линия; в – схема перемещений

ной точки. Из чертежа $z_A = 6$ см; $|y_A| = 4{,}5$ см. Переводя размерности, получим

$$\sigma_{max} = M_{max}\left(\frac{\sin 30^\circ}{J_y} z_A + \frac{\cos 30^\circ}{J_z} y_A\right) =$$

$$= 10\left(\frac{0{,}5}{296\cdot 10^{-8}}\cdot 6\cdot 10^{-2} + \frac{0{,}866}{884\cdot 10^{-8}}\, 4{,}5\cdot 10^{-2}\right) =$$

$$= 145{,}5\cdot 10^3\ \text{кН/м}^2 = 145{,}5\ \text{МПа}.$$

Найдем прогиб посередине пролета под сосредоточенной силой при плоском изгибе $f_{max} = P\ell^3/48EI$. Для этого определим по отдельности прогиб в главных плоскостях под действием проекций силы P на главные оси, равных $P_y = P\cos\alpha$, $P_z = P\sin\alpha$:

$$f_y = \frac{P_y \ell^3}{48EI_z} = \frac{10\cdot 10^3\cdot 4^3\cdot \cos 30^\circ}{48\cdot 2\cdot 10^5\cdot 10^6\cdot 884\cdot 10^{-8}} = 6{,}53\cdot 10^{-3}\,\text{м} = 6{,}53\ \text{мм};$$

$$f_z = \frac{P_z \ell^3}{48EI_y} = \frac{10\cdot 10^3\cdot 4^3\cdot \sin 30^\circ}{48\cdot 2\cdot 10^5\cdot 10^6\cdot 296\cdot 10^{-8}} = 11{,}26\cdot 10^{-3}\,\text{м} = 11{,}26\ \text{мм}.$$

Полный прогиб

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_z^2} = \sqrt{6{,}53^2 + 11{,}26^2} = 13{,}02\ \text{мм}.$$

Вертикальный прогиб

$$f_в = f_y\cos 30^\circ + f_z\cos 60^\circ = 6{,}53\cdot 0{,}866 + 11{,}26\cdot 0{,}5 = 11{,}29\ \text{мм}.$$

Горизонтальный прогиб

$$f_г = f_z\cos 30^\circ - f_y\sin 30^\circ = 11{,}26\cdot 0{,}866 - 6{,}53\cdot 0{,}5 = 6{,}49\ \text{мм}.$$

По найденным значениям строим схему перемещений центра тяжести сечения (рис.2.3,в).

П р и м е р 2.I.4. Подобрать двутавровое сечение для балки, изображенной на рис.2.4,а. Материал – сталь с допускаемым напряжением $[\sigma] = 140$ МПа. Задано: $P = 10$ кН; $M_1 = 20$ кН·м; $M_2 = 10$ кН·м. Плоскость действующих сил наклонена к плоскости, совпадающей со стенкой двутавра, на угол 30^0 (рис.2.4,б).

Р е ш е н и е. Для определения опасного сечения требуется построить эпюру изгибающих моментов. Здесь можно обойтись без составления выражений для моментов по участкам.

Определим значения M в характерных сечениях балки. На свободном конце консоли момент равен нулю. В сечении чуть левее опоры A момент $M_A^{лев} = -P\cdot 1 = -10$ кН·м, а чуть правее нее момент $M_A^{пр} = -P\cdot 1 + M_1 = -10 + 20 = 10$ кН·м. В опорном сечении B $M_B = -M_2 = -10$ кН·м. Достаточно отложить на эпюре M эти значения и соединить полученные точки прямыми линиями (рис.2.4,в). Выписываем условие прочности (2.5):

$$\frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z} \le [\sigma].$$

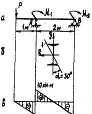


Рис.2.4. К примеру 2.I.4: а – схема балки; б – сечение балки: I – плоскость действия сил; в – эпюра изгибающих моментов

Здесь $|M_y| = |M_{max}|\sin 30^\circ$; $|M_z| = |M_{max}|\cos 30^\circ$.

Из эпюры видно, что в трех сечениях по длине балки действует наибольший изгибающий момент $|M_{max}| = 10$ кН·м.

Вводим обозначение $c = W_z/W_y$ и переписываем условие прочности относительно W_z:

$$W_z \ge \frac{|M_z| + c\,|M_y|}{[\sigma]} = \frac{10\cos 30^\circ + c\cdot 10\cdot \sin 30^\circ}{140\cdot 10^3} =$$

$$= \frac{8{,}66 + 5{,}0\cdot c}{0{,}14}\,10^{-6} = (61{,}86 + 35{,}71\cdot c)\cdot 10^{-6}\,\text{м}^3 =$$

$$= 61{,}86 + 35{,}71\cdot c\ \ \text{см}^3.$$

Из сортамента для двутавра (ГОСТ 8239-56) следует, что отношение $c = W_z/W_y$ лежит в пределах от $c = 6$ (двутавр № 10) до $c = 13{,}5$ (двутавр № 70Б).

Используем метод последовательных приближений. В первом приближении принимаем $c = 10$, тогда момент сопротивления

$$W_z \ge 61{,}86 + 35{,}71\cdot 10 = 418{,}9\ \text{см}^3.$$

Ближайший двутавр № 27А имеет $W_z = 407$ см^3 и $W_y = 50{,}0$ см^3. Определяем наибольшие напряжения

$$\sigma_{max} = \frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z} = \frac{10 \cdot \sin 30^\circ}{50{,}0 \cdot 10^{-6}} + \frac{10 \cdot \cos 30^\circ}{407 \cdot 10^{-6}} =$$

$$= (100 + 21{,}3) \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2 = 121{,}3 \text{ МПа}.$$

Недогрузка составляет $\frac{140 - 121{,}3}{140} \cdot 100 \approx 13{,}4\% > 5\%$.

Берем меньший двутавр № 27 с $W_z = 371$ см^3 и $W_y = 41{,}5$ см^3.

$$\sigma_{max} = \frac{10 \cdot 0{,}5}{41{,}5 \cdot 10^{-6}} + \frac{10 \cdot 0{,}866}{371 \cdot 10^{-6}} = (120{,}5 + 23{,}3) \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2 = 143{,}8 \text{ МПа}.$$

Перенапряжение $\frac{143{,}8 - 140}{140} \cdot 100 = 2{,}7\% < 5\%$.

Итак, останавливаем свой выбор на двутавре № 27.

П р и м е р 2.1.5. Деревянная балка (рис.2.5,а) прямоугольного поперечного сечения нагружена вертикальной силой P в сечении A и горизонтальной силой P в сечении B. Обе силы проходят через центры тяжести сечений.

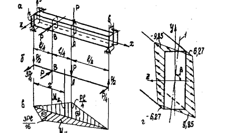


Рис.2.5. К примеру 2.1.5. а – схема балки; б – схема сил; в – эпюра изгибающих моментов M_z и M_y; г – эпюра нормальных напряжений в сечении B : I – нейтральная линия

Найти допускаемую нагрузку P, если заданы: $h = 24$ см; $h/b = 3$; $\ell = 2$ м; $[\sigma] = 10$ Мпа. Определить положение нейтральной линии в опасном сечении балки и построить для этого сечения эпюру нормальных напряжений в аксонометрии.

Р е ш е н и е. В данном случае косой изгиб вызывается силами, направленными по главным осям сечения, но, так как они лежат в разных плоскостях, результирующий изгибающий момент в любом сечении по длине балки не лежит ни в одной из главных плоскостей.

Решая по отдельности две элементарные задачи изгиба балки в вертикальной и горизонтальной плоскостях, определяем реакции опор, составляем схему сил (рис.2.5,б), строим эпюры изгибающих моментов M_z и M_y (рис.2.5,в). Очевидно, что *опасное сечение расположено на участке* AB. *В произвольном* сечении на этом участке на расстоянии x от левой опоры выражения моментов имеют следующий вид:

$$M_z = \frac{P}{2}x; \qquad M_y = \frac{3}{4}Px - P\left(x - \frac{\ell}{4}\right) = \frac{P}{4}(\ell - x).$$

В точках ребра, общего для верхней и лицевой граней балки, суммируются наибольшие сжимающие напряжения, а в в точках ребра, общего для нижней и тыльной граней, суммируются наибольшие растягивающие напряжения. Для точки рассматриваемого сечения, относящейся к последнему ребру, запишем:

$$\sigma_{max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{Px}{2W_z} + \frac{P(\ell - x)}{4W_y}.$$

С учетом того, что $b = \frac{h}{3}$

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{h^3}{18}; \qquad W_y = \frac{hb^3}{6} = \frac{h^3}{54},$$

тогда

$$\sigma_{max} = \frac{18Px}{2h^3} + \frac{54P(\ell - x)}{4h^3} = \frac{9P}{2h^3}(3\ell - x).$$

Сечениям участка AB соответствуют $\ell/4 \leqslant x \leqslant \ell/2$. Очевидно, что опасным будет сечение B с координатой $x = \ell/4$:

$$\sigma_{max} = \frac{9P}{2h^3}\left(3\ell - \frac{\ell}{4}\right) = \frac{99}{8}\,\frac{P\ell}{h^3}.$$

Отметим попутно, что положение опасного сечения чувствительно к величине отношения h/b. Легко показать, что при $h/b = 2$ во всех сечениях участка АВ максимальные напряжения одинаковые, а при меньшей величине отношения (например, $h/b = 1{,}5$) максимальные напряжения возникнут в сечении А.

Условие прочности $\sigma_{max} = 99Pl/8h^3 \leq [\sigma]$ позволяет получить выражение для определения допускаемой нагрузки

$$P \leq \frac{8h^3[\sigma]}{99l} = \frac{8(24\cdot10^{-2})^3\cdot10\cdot10^6}{99\cdot2} = 5585\ \text{Н}.$$

Исходя из этого условия, принимаем $P = 5{,}5$ кН.

Для определения положения нейтральной линии по формуле (2.I) используем выражение $tg\alpha = M_y/M_z$. С учетом изложенного выше

$$tg\beta = \frac{J_z}{J_y}\,\frac{M_y}{M_z} = \frac{bh^3}{12}\,\frac{12}{h\cdot b^3}\,\frac{3Pl}{16}\,\frac{8}{Pl} = \frac{3}{2}\left(\frac{h}{b}\right)^2 = 13{,}5;\quad \beta = 85^\circ46'.$$

Для построения эпюры σ в опасном сечении, учитывая линейный закон изменения нормальных напряжений по высоте и ширине сечения (см.формулу (2.2)), достаточно рассчитать значения σ в угловых точках. Для двух точек можно использовать полученное выше выражение для σ_{max}:

$$\sigma_{max} = \frac{99Pl}{8h^3} = \frac{99\cdot5{,}5\cdot10^3\cdot2}{8\cdot24^3\cdot10^{-6}} = 9{,}85\cdot10^6\ \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 9{,}85\ \text{МПа}.$$

В точке с координатами $z = b/2$ и $y = h/2$ $\sigma = -9{,}85$ МПа. В точке с координатами $z = -b/2$ и $y = -h/2$ $\sigma = 9{,}85$ МПа. Для расчета σ в двух остальных точках используем формулу (2.2).

В точке с координатами $z = -b/2$ и $y = h/2$

$$\sigma = -\left(\frac{M_y}{J_y}z + \frac{M_z}{J_z}y\right) = -\left(\frac{3Pl\cdot12}{16\ hb^3}\left(-\frac{b}{2}\right) + \frac{Pl\,12}{8bh^3}\,\frac{h}{2}\right) =$$

$$= -\left(-\frac{81}{8}\,\frac{Pl}{h^3} + \frac{18}{8}\,\frac{Pl}{h^3}\right) = \frac{63}{8}\,\frac{5{,}5\cdot10^3\cdot2}{24^3\cdot10^{-6}} = 6{,}27\ \text{МПа}.$$

В точке с координатами $z = b/2$ и $y = -h/2$

$$\sigma = -\left(\frac{81}{8}\,\frac{Pl}{h^3} - \frac{18}{8}\,\frac{Pl}{h^3}\right) = -6{,}27\ \text{МПа}.$$

Изображаем в аксонометрии сечение балки, проводим нейтральную линию, строим эпюру нормальных напряжений (рис.2.5,г).

2.2. Внецентренное растяжение или сжатие. Растяжение или сжатие и изгиб

При внецентренном растяжении (сжатии) линия действия продольной силы не совпадает с геометрической осью стержня, оставаясь ей параллельной (рис.2.6.). Полагая точку приложения силы P размещенной в положительном квадранте, рассмотрим напряжения, вызываемые этой силой. При внецентренном растяжении в поперечных сечениях бруса возникают изгибающие моменты $M_z = P\,y_p$, $M_y = P\,z_p$ (y_p и z_p - координаты точки приложения силы) и осевая сила $N = P$. Таким образом, имеет место комбинация чистого косого изгиба (или двух чистых изгибов в главных плоскостях) и осевого растяжения (сжатия).

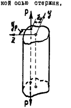


Рис.2.6. Внецентренное растяжение стержня

Нормальные напряжения в произвольной точке с координатами y и z любого поперечного сечения определяются формулой

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{J_y}z + \frac{M_z}{J_z}y = \frac{P}{F}\left(1 + \frac{z_p\cdot z}{i_y^2} + \frac{y_p\,y}{i_z^2}\right), \qquad (2.6)$$

где $i_y = \sqrt{J_y/F}$, $i = \sqrt{J_z/F}$ - радиусы инерции площади поперечного сечения.

Величину силы P следует подставлять в эту формулу со знаком, соответствующим роду деформации (с плюсом - растяжение, с минусом - сжатие).

Уравнение нейтральной линии имеет вид

$$1 + \frac{z_p\,z}{i_y^2} + \frac{y_p\,y}{i_z^2}. \qquad (2.7)$$

П р и м е р 2.2.I. Две полосы из стали, имеющей в исходном состоянии допускаемое напряжение $[\sigma]$, сварены встык. Составная полоса растягивается центральной силой P, при которой $\sigma = P/bt = 0{,}93\,[\sigma]$. Так как сварка приводит к снижению механических характеристик материала, величина допускаемого напряжения для материала в зоне шва составила $[\sigma]_ш = 0{,}84[\sigma]$. Поэтому сделано подкрепление этой зоны приваркой накладки (рис.2.7,а). Определить требуемую толщину пластины из условия прочности.

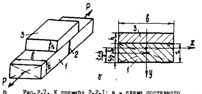


Рис.2.7. К примеру 2.2.1: а – схема составного стержня; б – поперечное сечение по стыку: 1 – составная полоса; 2 – сварной шов; 3 – накладка

Р е ш е н и е. Рассмотрим поперечное сечение по стыку полос (рис.2.7,б). Высота сечения равна сумме толщин полосы и накладки. Проводим через центр тяжести сечения главные оси y и z. Линия действия силы P отстоит от поперечной оси z на расстояние $y_P=(t+h)/2-t/2=h/2$. Наибольшие нормальные напряжения, действующие в точках с $y_{max}=(t+h)/2$, определяем по формуле (2.6):

$$\sigma_{max}=\frac{P}{F}+\frac{M_z}{J_z}y_{max}=\frac{P}{b(t+h)}+\frac{P\,y_P\,y_{max}}{b(t+h)^3/12}=$$

$$=\frac{P}{b}\left(\frac{1}{t+h}+\frac{3h}{(t+h)^2}\right)=\frac{P}{b}\,\frac{t+4h}{(t+h)^2}.$$

Условие прочности имеет вид $\sigma_{max}\leq[\sigma]_ш=0{,}84[\sigma]$. В свою очередь, из равенства $P/bt=0{,}93[\sigma]$ можно записать $[\sigma]=P/0{,}93bt$. Итак:

$$\frac{P}{b}\,\frac{t+4h}{(t+h)^2}\leq\frac{0{,}84P}{0{,}93bt}.$$

Переходя к равенству, после сокращений получаем уравнение

$$t(t+4t)=0{,}90(t+4h)^2 \quad \text{или} \quad 0{,}9h^2-2{,}2t\,h-0{,}1t^2=0.$$

Решаем это уравнение относительно h, отбрасываем один из корней, имеющий отрицательное значение. Второй корень имеет значение $h=2{,}48t$ Окончательно принимаем $h=2{,}5t$.

П р и м е р 2.2.2. Во сколько раз уменьшится несущая способность якорной цепи (рис.2.8,а), если одно из звеньев окажется разомкнутым?

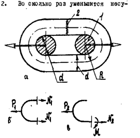


Рис.2.8. К примеру 2.2.2: а – звено цепи: 1 – сечение смежного звена; 2 – сварной шов (здесь возможно размыкание звена); б – внутренние усилия в сечениях целого звена; в – внутренние усилия в сечениях разомкнутого звена

Р е ш е н и е. Для сравнения рассмотрим целое и разомкнутое звенья. Применяя метод сечений, определяем внутренние усилия, действующие в сечениях прутка, из которого изготовлено звено. В поперечных сечениях целого звена действуют только растягивающие усилия $N_1=0{,}5P_1$ (рис.2.8,б) и

$$\sigma_{max}=\frac{N_2}{F}=\frac{0{,}5P_1}{\pi d^2/4}=\frac{2P_1}{\pi d^2}.$$

Из условия прочности $\sigma_{max}\leq[\sigma]$ находим допускаемое значение нагрузки $[P_1]=\pi d^2[\sigma]/2$.

В случае разомкнутого звена (рис.2.8,в) в поперечном сечении помимо растягивающей силы $N_2=P_2$ из-за внецентренности силы P_2 возникает изгибающий момент $M=P_2R$. Наибольшее напряжение

$$\sigma_{max}=\frac{N_2}{F}+\frac{M}{W}=\frac{P_2}{\pi d^2/4}+\frac{P_2R}{\pi d^3/32}=\frac{4P_2}{\pi d^2}\left(1+8\frac{R}{d}\right).$$

Из условия прочности

$$[P_2]=\pi d^2[\sigma]/4(1+8R/d).$$

Сравним допускаемые нагрузки, взяв отношение

$$\frac{[P_1]}{[P_2]}=\frac{\pi d^2[\sigma]}{2}\,\frac{4(1+8R/d)}{\pi d^2[\sigma]}=2(1+8R/d).$$

Из рис.2.8,а видно, что наименьшее значение $R/d = 1$. В этом случае $[P_1]/[P_2] = 18$. На практике для исключения заклинивания звеньев цепи берут $R/d > 1$. Взяв, к примеру, $R/d = 1{,}25$, получим $[P_1]/[P_2] = 22$.

Итак, можно сделать заключение, что размыкание одного лишь звена может резко снизить несущую способность всей цепи.

П р и м е р 2.2.3. Определить наибольшие и наименьшие нормальные напряжения и положение нейтральной оси в опасном сечении прямого бруса (рис.2.9,а). Задано: $\ell = 50$ см, $a = 10$ см, $P = 100$ кН.

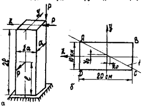


Рис.2.9. К примеру 2.2.3: а – схема бруса; б – сечение бруса в заделке; I – нейтральная линия

Р е ш е н и е. Проанализируем воздействие на деформацию бруса каждой из трех сил отдельно.

Вертикальная сила приводит к внецентренному сжатию следовательно, применима формуле (2.6):

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{J_y} z + \frac{M_z}{J_z} y ,$$

в которой $N = -P$; эксцентриситет силы $z_P = -a$; $y_P = 0{,}5a$; $M_y = (-P)(-a) = P \cdot a$; $M_z = (-P)\, 0{,}5a = -0{,}5Pa$; $J_y = a\,(2a)^3/12 = 2a^4/3$; $J_z = 2a\, a^3/12 = a^4/6$; $F = 2a^2$. Напряжения во всех поперечных сечениях бруса одинаковые.

Верхняя поперечная сила, направленная вдоль оси z, приводит к плоскому изгибу относительно оси y. Наибольший момент действует в сечении заделки: $M_{y\,max} = P\,2\ell$. В точках сечения, имеющих положительные координаты по оси z, при этом изгибе наблюдается сжатие, следовательно, можно записать

$$\sigma = -\frac{M_{y\,max}}{J_y} z = -\frac{2P\ell}{J_y} z .$$

Поперечная сила, приложенная посередине длины бруса, приводит к изгибу в другой главной плоскости. Опасным также является сечение заделки, в котором $M_{z\,max} = P\ell$.

Точки с положительными координатами по оси y при этом изгибе испытывают растяжение:

$$\sigma = \frac{M_{z\,max}}{J_z} y = \frac{P\ell}{J_z} y .$$

Суммируя моменты, составляем общую формулу для нормальных напряжений в произвольной точке с координатами y и z, принадлежащей сечению заделки:

$$\sigma = -\frac{P}{F} + \frac{Pa - 2P\ell}{J_y} z + \frac{-0{,}5Pa + P\ell}{J_z} y .$$

Для упрощения последующих расчетов условимся подставлять в эту формулу силу в килоньютонах, линейные размеры – в сантиметрах. Напряжения получают размерность, которую мы в заключение расчетов приведем к стандартной:

$$\sigma = -\frac{100}{2 \cdot 100} + \frac{100\,(10 - 100)}{2 \cdot 10^4/3} z + \frac{100(-5+50)}{10^4/6} y =$$

$$= -0{,}5 - 1{,}35 z + 2{,}7 y .$$

Вычислим напряжения в угловых точках сечений (рис.2.9,б) в точке A ($z_A = 10$ см, $y_A = 5$ см)

$$\sigma_A = -0{,}5 - 1{,}35 \cdot 10 + 2{,}7 \cdot 5 = -0{,}5 \text{ кН/см}^2;$$

в точке B ($z_B = -10$ см, $y_B = 5$ см):

$$\sigma_B = -0{,}5 + 13{,}5 + 13{,}5 = 26{,}5 \text{ кН/см}^2;$$

в точке C ($z_C = -10$ см, $y_C = -5$ см):

$$\sigma_C = -0{,}5 + 13{,}5 - 13{,}5 = -0{,}5 \text{ кН/см}^2;$$

в точке D ($z_D = 10$ см, $y_D = -5$ см):

$$\sigma_D = -0{,}5 - 13{,}5 - 13{,}5 = -27{,}5 \text{ кН/см}^2.$$

С учетом того, что $1 \text{ кН/см}^2 = 10^{-3} \text{ МН}/10^{-4} \text{ м}^2 = 10$ МПа, окончательно получаем:

$$\sigma_{max} = \sigma_B = 265\ МПа \quad ; \quad \sigma_{min} = \sigma_D = -275\ МПа .$$

В остальных точках

$$\sigma_A = \sigma_C = -5\ МПа .$$

Уравнение нейтральной линии получаем приравниванием нулю уравнения для напряжений:

$$-0{,}5 - 1{,}35\,z + 2{,}7\,y = 0 .$$

Если z_0 и y_0 – точки пересечения нейтральной линии с осями координат, то при $z = z_0$ $y = 0$:

$$-0{,}5 - 1{,}35\,z_0 + 0 = 0 \quad ; \quad z_0 = -0{,}370\ см .$$

Аналогично, при $y = y_0$, $z = 0$ $-0{,}5 - 0 + 2{,}7\,y_0 = 0$; $y_0 = 0{,}185$ см. Проводим на чертеже *поперечного сечения нейтральную ось* (рис.2.9,б).

2.3. Кручение и изгиб

При одновременном кручении и изгибе стержня возможна комбинация пяти внутренних силовых факторов: крутящего момента $M_x = M_к$, двух изгибающих моментов M_y и M_z и двух поперечных сил Q_y и Q_z. Наиболее часто такому виду деформации подвергаются вращающиеся элементы машин и механизмов, обычно имеющие круглое поперечное сечение, например, различного рода валы. В этих случаях напряжения от действия сил Q_y и Q_z имеют второстепенное значение, ими в расчетах пренебрегают.

Крутящий момент вызывает наибольшие значения касательных напряжений во всех точках контура сечения, равные $\tau_{max} = M_к / W_p$, где $W_p = \pi d^3/16$ – полярный момент сопротивления круглого сплошного сечения диаметром d .

Изгиб же в двух плоскостях от действия M_y и M_z можно привести к плоскому изгибу от действия результирующего изгибающего момента $M_и = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$, так как осевой момент инерции круглого сечения не зависит от положения поперечной оси. Таким образом, наибольшие нормальные напряжения равны $\sigma_{max} = M_и / W$ где $W = \pi d^3/32$ – осевой момент сопротивления. В опасных точках, испытывающих наибольшие нормальное σ_{max} и касательное τ_{max} напряжения, наблюдается плос-

кое напряженное состояние. Для стержней, изготовленных из пластичного материала, в этом случае применяют III или IУ критерии прочности. Эквивалентный расчетный момент по III критерию прочности вычисляется по формуле

$$M_{э\,III} = \sqrt{M_и^2 + M_к^2} , \tag{2.8}$$

а по IУ критерию:

$$M_{э\,IV} = \sqrt{M_и^2 + 0{,}75\,M_к^2} . \tag{2.9}$$

Расчетное напряжение определяется по формуле

$$\sigma_{расч} = M_э / W = 32\,M_э / \pi d^3 \tag{2.10}$$

и должно удовлетворять условию прочности $\sigma_{расч} \le [\sigma]$.

П р и м е р 2.3.I. Кулачок нагружен вертикальной силой P (рис.2.10). Исходя из III критерия прочности вычислить наибольшую допускаемую величину силы P, если диаметр круглого стержня d = 50 мм, l = 20 см, a = 15 см. Допускаемое напряжение $[\sigma]$ = 100 МПа.

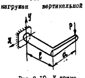


Рис.2.10. К примеру 2.3.I

Р е ш е н и е. Из схемы кулачка видно, что круглый стержень будет испытывать кручение постоянным по его длине крутящим моментом, равным $M_к = Pa$. Кроме того, он изгибается в вертикальной плоскости, причем наибольшее значение изгибающего момента будет в сечении заделки: $M_z = Pl$.

По III критерию прочности

$$M_э = \sqrt{(Pl)^2 + (Pa)^2} = P\sqrt{l^2 + a^2} .$$

Расчетное напряжение

$$\sigma_{расч} = 32\,M_э / \pi d^3 = 32\,P\sqrt{l^2 + a^2} / \pi d^3$$

должно удовлетворять условию $\sigma_{расч} \le [\sigma]$. Получаем неравенство $32\,P\sqrt{l^2 + a^2} / \pi d^3 \le [\sigma]$, откуда

$$P \le \frac{[\sigma]\,\pi d^3}{32\sqrt{l^2 + a^2}} = \frac{100 \cdot 10^6 \cdot 3{,}14\,(50 \cdot 10^{-3})^3}{32\sqrt{0{,}2^2 + 0{,}15^2}} = 4908\ Н .$$

Принимаем допускаемое значение нагрузки

$$[P] = 4{,}9 \text{ кН}.$$

Пример 2.3.2. На стальной вал от электродвигателя передается мощность $N = 80$ кВт. Вал вращается с $n = 480$ об/мин. На него насажены два шкива диаметрами $D_1 = 0{,}2$ м и $D_2 = 0{,}6$ м (рис.2.11,а), вес которых соответственно $Q_1 = 2$ кН, $Q_2 = 4$ кН. С первого шкива снимается четвертая часть, а со второго – остальная часть передаваемой мощности. Через шкивы перекинуты ремни. Ветви первого направлены вертикально вниз, а второго – под углом к горизонту $\alpha = 45°$. Усилия в сбегающих ветвях вдвое меньше, чем в набегающих. Используя IV критерий прочности, определить необходимый диаметр d вала, если $\ell = 2$ м, $[\sigma] = 80$ МПа.

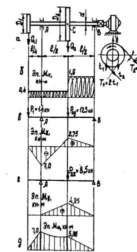


Рис.2.11. К примеру 2.3.2: а – схема задачи; б – эпюра крутящих моментов; в – изгиб в вертикальной плоскости; г – изгиб в горизонтальной плоскости; д – эпюра результирующих изгибающих моментов

Решение. Вал подвергается изгибу и кручению. Крутящий момент, передаваемый от электродвигателя, находится из соотношения $N = M_к\,\omega$ (где ω – частота вращения, выраженная через число оборотов в минуту $\omega = \pi n/30$):

$$M_к = N/\omega = 30N/\pi n = 30 \cdot 80/3{,}14 \cdot 480 = 1{,}60 \text{ кН·м}.$$

Поскольку $N_1 = 0{,}25N$, а $N_2 = 0{,}75N$, крутящий момент, действующий на вал со стороны первого шкива, равен $M_{к1} = 0{,}4$ кН·м, а второго – $M_{к2} = 1{,}2$ кН·м. Эпюра крутящих моментов представлена на рис.2.11,б.

С другой стороны, усилия натяжения ветвей ремня создают вращающий момент, равный соответствующему крутящему:

$$M_{к1} = M_1 = T_1 D_1/2 - t_1 D_1/2 = (2t_1 - t_1)D_1/2 = t_1 D_1/2 \ ; \ M_{к2} = M_2 = t_2 D_2/2 .$$

Отсюда

$$t_1 = 2M_{к1}/D_1 = 2 \cdot 0{,}4/0{,}2 = 4 \text{ кН} \ ; \quad T_1 = 2t_1 = 8 \text{ кН} \ ;$$

$$t_2 = 2M_{к2}/D_2 = 2 \cdot 1{,}2/0{,}6 = 4 \text{ кН} \ ; \quad T_2 = 2t_2 = 8 \text{ кН} .$$

В сечении посадки первого шкива действует вертикально вниз сила

$$P_1 = Q_1 + T_1 + t_1 = 2 + 8 + 4 = 14 \text{ кН}.$$

В сечении посадки второго шкива действует вертикальная сила Q_2 и наклонная, равная сумме T_2 и t_2. Проецируя последнюю на вертикальную и горизонтальную поперечные оси, находим

$$P_{2y} = Q_2 + (T_2 + t_2)\sin\alpha_2 = 4 + (8+4)\sin 45° = 12{,}5 \text{ кН} \ ;$$

$$P_{2z} = (T_2 + t_2)\cos\alpha = (8+4)\cos 45° = 8{,}5 \text{ кН} .$$

Определив реакции при изгибе в вертикальной плоскости от действия сил P_1 и P_{2y}, строим обычным путем эпюру изгибающих моментов M_z (рис.2.11,в). Таким же образом строим эпюру изгибающих моментов M_y (рис.2.11,г). Затем, используя формулу $M_и = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$, строим эпюру результирующего изгибающего момента (рис.2.11,д).

По формуле (2.9) определяем значения эквивалентного момента в сечениях A и C :

$$M^A_{э\,IV} = \sqrt{M_и^2 + 0{,}75 M_к^2} = \sqrt{7{,}0^2 + 0{,}75 \cdot 0{,}4^2} = 7{,}01 \ \text{кН·м} \ ;$$

$$M^C_{э\,IV} = \sqrt{5{,}06^2 + 0{,}75 \cdot 1{,}6^2} = 5{,}25 \ \text{кН·м} .$$

Таким образом, опасным является сечение A. Условие прочности имеет вид $\sigma_{расч} = M_э / W \leq [\sigma]$, откуда $W \geq M_э/[\sigma]$. Осевой момент сопротивления $W = \pi d^3/32$. Требуемый диаметр

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 M_э}{\pi [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 7{,}01}{3{,}14 \cdot 80 \cdot 10^3}} = 9{,}63 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Принимаем стандартный размер сечения вала: d = 100 мм.

П р и м е р 2.3.3. Подобрать необходимые размеры поперечного сечения каждого из четырех элементов стержневой пространственной конструкции. Три элемента имеют прямоугольные сечения с отношениями сторон $h/b = 2$, а один – круглое сплошное сечение диаметром d. Ориентация сечений показана на рис.2.12,а. Задано: P = 6 кН, q = 10 кН/м, l = 1 м, $[\sigma]$ = 160 МПа.

Р е ш е н и е. Для построения эпюр внутренних силовых факторов применяем метод сечений. Рассматривая каждый участок отдельно, совмещаем ось x с осью элемента, а оси y и z направляем вдоль главных осей поперечного сечения этого участка. Считая положительными изгибающие моменты, приводящие к сжатию со стороны положительного направления поперечной оси координат, строим эпюру этих моментов *обязательно на сжатом волокне стержня. Знак на ней при этом можно не ставить.*

Элемент AB (рис.2.12,б). В произвольном сечении на расстоянии x_1 от точки A равны нулю осевая сила N, поперечная сила Q_z, крутящий момент M_x и изгибающий момент M_y. Поперечная сила $Q_y = -P = -6$ кН. Изгибающий момент M_z определяется выражением $M_z = -Px_1$. Вычисляем значения M_z на границах участка. При $x = 0$ (в точке A) $M_z = 0$. При $x = 0{,}2l = 0{,}2$ м (в точке B) $M_z = -6 \cdot 0{,}2 = 1{,}2$ кН.м.

Элемент BC (рис.2.12,в). *В произвольном сечении с* координатой x_2 равны нулю Q_y, Q_z, M_x, M_y. Осевая сила $N = P = 6$ кН. Изгибающий момент $M_z = -P\,0{,}2l = -1{,}2$ кН·м – величина постоянная по всей длине элемента BC.

Элемент CD (рис.2.12,г). Равны нулю N и M_x. Сила P приводит к изгибу в горизонтальной плоскости, а распределенная нагрузка q – в вертикальной. $M_y = -P x_3$; при $x = 0$ (точка D) $M_y = 0$, при $x = l = 1$ м (точка C) $M_y =$

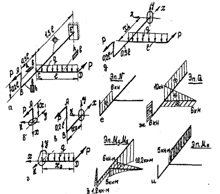


Рис.2.12. К примеру 2.3.3: а – схема конструкции; б – участок элемента AB; в – участок элемента BC; г – участок элемента DC; д – участок элемента CE; е – эпюра N; ж – эпюра Q; з – эпюра M_z и M_y; и – эпюра $M_к$

$= -6$ кН·м, $Q = P = 6$ кН. $M_z = -q x_3^2/2$; при $x = 0$ $M_z = 0$; при $x = l$ $M_z = -10 \cdot 1^2/2 = -5$ кН.м. Из выражения для M_z видно, что его эпюра будет иметь вид параболы. Вычислим значение M_z при $x = l/2$ $M_z = -10 \cdot 0{,}5^2/2 = -1{,}25$ кН·м. Поперечная сила $Q_y = qx$; при $x = 0$ $Q_y = 0$; при $x = l$ $Q_y = 10 \cdot 1 = 10$ кН.

Элемент CE (рис.2.12,д). Проецируя силы на продольную ось x, получаем $N = P - P = 0$. Проекции на поперечные оси дают $Q_z = 0$, $Q_y = ql = 10$ кН. Крутящий момент $M_x = ql^2/2 = 5$ кН·м. Изгибающие моменты: $M_y = -P = -6$ кН·м; $M_z = -P\,0{,}2l - ql\,x_4$; при $x_4 = 0$ (точка C) $M_z = -1{,}2$ кН·м; при $x = 1{,}5l = 1{,}5$ м (сечение E) $M_z = -1{,}2 - 10 \cdot 1 \cdot 1{,}5 = -16{,}2$ кН·м.

Итак, строим эпюры продольных сил (рис.2.12,е), поперечных сил (рис.2.12,ж), изгибающих (рис.2.12,з) и крутящих (рис.2.12,и) моментов.

Приступаем к подбору размеров поперечных сечений по участкам. Составляя условия прочности, пренебрегаем действием поперечных сил.

<u>Участок АВ</u>. Опасным является сечение В, где действует наибольший изгибающий момент. Условие прочности имеет вид $\sigma_{max}=M_{z\,max}/W_z \leqslant [\sigma]$, где $W_z=bh^2/6$ – осевой момент сопротивления. С учетом отношения $h/b=2$ $W_z=h^3/12$. Приводим размерность напряжения к удобному здесь виду $[\sigma]=160$ МПа $=160\cdot10^3$ кН/м². Находим h из неравенства $h^3/12 \geqslant M_{z\,max}/[\sigma]$, $h \geqslant \sqrt[3]{12M_{z\,max}/[\sigma]}=\sqrt[3]{12\cdot1{,}2/160\cdot10^3}=$ $=4{,}48\cdot10^{-2}$ м.

Принимаем $h_1=45$ см, $b_1=2{,}25$ см.

<u>Участок ВС</u>. Все поперечные сечения – равноопасны, испытывая растяжение и изгиб в вертикальной плоскости:

$$\sigma_{max}=\frac{N}{F}+\frac{M_z}{W_z}=\frac{N}{bh}+\frac{M_z\cdot6}{bh^2}=\frac{2N}{h^2}+\frac{12M_z}{h^3}=\frac{2\cdot6}{h^2}+\frac{12\cdot1{,}2}{h^3}=$$
$$=\frac{12}{h^2}+\frac{14{,}4}{h^3}\leqslant[\sigma]=160\cdot10^3\ \text{кН/м}^2.$$

Задача сводится к решению кубического уравнения. В этом случае лучше использовать метод последовательных приближений. В первом приближении определяем размер сечения без учета продольной силы, а затем вносим коррективы в эти размеры, добиваясь удовлетворения условия прочности с отклонением величины σ_{max} от величины $[\sigma]$ не более чем на $\pm5\%$.

Здесь видно, что учет только изгиба даст такие же результаты, как и на участке АВ: $h_2=4{,}5$ см; $b_2=2{,}25$ см.

Проверим условие прочности:

$$\sigma_{max}=\frac{12}{4{,}5^2\cdot10^{-4}}+\frac{14{,}4}{4{,}5^3\cdot10^{-6}}=(5{,}9+158{,}0)\cdot10^3=163{,}9\cdot10^3\ \text{кН/м}^2.$$

Получено значение $\sigma_{max}>[\sigma]$. Перегрузка составляет

$$\frac{163{,}9-160}{160}\cdot100=2{,}44\%<5\%.$$

В итоге принимаем $h_2=4{,}5$ см, $b_2=2{,}25$ см.

<u>Участок DC</u>. Здесь имеем комбинацию двух плоских изгибов, что соответствует косому изгибу. Опасным является сечение С, в котором оба изгибающих момента максимальны:

$$\sigma_{max}=\frac{M_y}{W_y}+\frac{M_z}{W_z}=\frac{M_y\,6}{bh^2}+\frac{M_z\,6}{hb^2}=\frac{12M_y+24M_z}{h^3}=$$
$$=\frac{12\cdot6+24\cdot5}{h^3}=\frac{192}{h^3}\leqslant160\cdot10^3\ \text{кН/м}^2.$$
$$h\geqslant\sqrt[3]{\frac{192}{160\cdot10^3}}=10^6\cdot10^{-2}\ \text{м}.$$

Принимаем $h_3=10{,}6$ см, $b_3=5{,}3$ см.

<u>Участок СЕ</u>. Здесь имеем комбинацию кручения с изгибом в двух плоскостях. Так как сечение круглое, изгиб можно учесть результирующим моментом $M_и=\sqrt{M_y^2+M_z^2}$. Опасным будет сечение Е в заделке:

$$M_и=\sqrt{6^2+16{,}2^2}=17{,}28\ \text{кН}\cdot\text{м}.$$

По III критерию прочности (см.формулу 2.8)) расчетное значение эквивалентного момента

$$M_э=\sqrt{M_и^2+M_к^2}=\sqrt{17{,}28^2+5^2}=18{,}0\ \text{кН}\cdot\text{м}.$$

Расчетное напряжение, определяемое формулой (2.10), должно удовлетворять условию прочности

$$\sigma_{расч}=\frac{M_э}{W}=\frac{32\,M_э}{\pi d^3}\leqslant[\sigma],$$

откуда

$$d\geqslant\sqrt[3]{\frac{32\,M_э}{\pi[\sigma]}}=\sqrt[3]{\frac{32\cdot18{,}0}{3{,}14\cdot160\cdot10^3}}=10{,}46\cdot10^{-2}\ \text{м}.$$

Принимаем $d=10{,}5$ см.

Итак, размеры сечений элементов конструкции следующие:

АВ: $h_1=4{,}5$ см, $b_1=2{,}25$ см;

ВС: $h_2=4{,}5$ см, $b_2=2{,}25$ см;

DC: $h_3=10{,}6$ см, $b_3=5{,}3$ см;

CE: $d=10{,}5$ см.

ОГЛАВЛЕНИЕ