САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ МОРСКОЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра сопротивления материалов

РАСЧЕТ СТЕРЖНЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СУДОВЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Часть IV

Методические указания

Санкт-Петербург
2000

Методические указания, предназначенные для студентов Санкт-Петербургского государственного морского технического университета вечерней и заочной форм обучения, помогут им самостоятельно разобраться в решении задач. Четвертая часть указаний посвящена расчетам перемещений при простых видах статического и динамического нагружения, расчетам динамической прочности, а также исследованиям напряженного состояния в точке деформированного тела и расчетам прочности в общих случаях нагружения. Приводятся в достаточном объеме примеры задач с подробным разбором их решения. Материал указаний должен способствовать успешному выполнению домашних заданий, расчетно-проектировочных работ студентами, обучающимися без отрыва от производства.

Главы 1, 2 написаны М.Н.Сиверсом, глава 3 – А.М.Усачевым.

СИВЕРС
Михаил Николаевич

УСАЧЕВ
Александр Михайлович

РАСЧЕТ СТЕРЖНЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СУДОВЫХ КОНСТРУКЦИЙ

ЧАСТЬ IV

Методические указания

Ответственный редактор канд.техн.наук, доц.И.И.Курнаева
Редактор Т.А.Канн

Подписано в печать 21.01.2000
Зак.1496. Тир.300. Уч.-изд.л.3,8. СПбГМТУ, Лоцманская, 10

I. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ СТАТИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ СТЕРЖНЕЙ

В части I методических указаний "Расчет стержневых элементов судовых конструкций" были рассмотрены примеры определения нормальных σ и касательных τ напряжений в поперечных сечениях стержней при простых нагружениях: растяжении – сжатии, изгибе, кручении. Выполнение условий $|\sigma|_{max} \leq [\sigma]$ и $\tau_{max} \leq [\tau]$ свидетельствовало о прочности стержня. Однако при проектировании инженерных сооружений также необходимо проверить и обеспечить достаточную их жесткость, т.е. малость линейных и угловых перемещений по всей длине. Рассмотрим этот вопрос.

Совмещая продольную ось стержня с координатной осью ox, а главные оси инерции поперечных сечений с осями oy и oz, обозначим осевые перемещения точек соответственно u, v, w, а углы поворотов поперечных сечений относительно координатных осей – θ_x, θ_y, θ_z.

При сложном характере нагружения стержня (рис.I.I) полное перемещение произвольной точки

$$\rho = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \ ,$$

а жесткость проверяется условием

$$\rho_{max} \leq [\rho], \tag{I.I}$$

где $[\rho]$ – допускаемое перемещение.

В случае растяжения и сжатия для стержня определяются изменяющиеся по длине перемещения $u = u(x)$; в случае кручения – углы поворотов поперечных сечений $\theta_x(x)$; в случае поперечного изгиба в плоскости yox – осевые перемещения $v(x)$ и углы поворотов $\theta_z(x)$; в случае поперечного изгиба в плоскости zOx – $w(x)$ и $\theta_y(x)$.

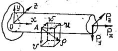

Рис.I.I. Сложное нагружение: u, v, w – осевые; ρ-полное перемещение точки A

Расчет перемещений статически нагруженных и упруго деформируемых стержневых конструкций основан на использовании закона Гука, согласно которому во всех точках стержня относительная продольная деформация

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \tag{I.2}$$

а угол сдвига

$$\gamma = \frac{\tau}{G}, \tag{I.3}$$

где E и G – модули продольной упругости и сдвига, характеризующие способность материала сопротивляться деформированию.

Для стали $E \approx 2\cdot10^5$ МПа и $G \approx 0,8\cdot10^5$ МПа. Подстановка в (I.2) или (I.3) соотношений, связывающих напряжения с внутренними усилиями в поперечных сечениях, а относительные деформации с абсолютными, приводит к формулам для вычисления перемещений.

I.I. Растяжение и сжатие

Известно, что при действии на стержень продольной силы P, как показано на рис.I.2,а, в поперечных сечениях возникают напряжения

$$\sigma = \frac{N}{F},$$

а относительная продольная деформация во всех точках

$$\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell},$$

где N – продольная сила; F – площадь сечения; ℓ – длина стержня; $\Delta\ell$ – абсолютное удлинение.

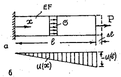

Рис.I.2. Продольное нагружение стержня (а) и эпюра перемещений (б)

Подставив σ и ε в формулу (I.2), получим закон Гука в форме, позволяющей найти абсолютные удлинения:

$$\Delta\ell = \frac{N\ell}{EF}. \tag{I.4}$$

Знаменатель EF в (I.4) определяет продольную жесткость стержня. Поскольку в рассматриваемом случае $N = P > 0$, из (I.4) следует, что чем больше P, тем больше стержень растягивается ($\Delta\ell > 0$). При противоположном направлении внешней силы P продольная сила $N = -P < 0$ и стержень сжимается ($\Delta\ell < 0$). Перемещение точек правого торцевого сечения $u(\ell)$ равно абсолютному удлинению всего стержня

$$u(\ell) = \frac{P\ell}{EF}.$$

Очевидно, что перемещение любого промежуточного поперечного сечения $u(x)$ равно абсолютному удлинению участка длиной x, заключенного между неподвижным торцом ($x = 0$, $u = 0$) и рассматриваемым сечением

$$u(x) = \frac{Px}{EF}. \tag{I.5}$$

Расчет $u(x)$ по формуле (I.5) приводит к эпюре изменения перемещений, изображенной на рис.I.2,б.

Для стержня ступенчато-переменного сечения, нагруженного несколькими сосредоточенными продольными силами, перемещение $u(x)$ равно сумме абсолютных удлинений всех участков, расположенных между известным из условий закрепления неподвижным и рассматриваемым сечениями

$$u(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{N_i\,\ell_i}{EF_i}, \qquad (I.6)$$

где n – число промежуточных участков, на каждом из которых определены N_i, ℓ_i, EF_i.

При отсутствии закреплений у стержня за неподвижное можно условно принять торцевое сечение со стороны начала координат.

В общем случае продольного нагружения стержня с переменной жесткостью

$$u(x)=\int_0^x\frac{N(x)}{EF(x)}\,dx. \qquad (I.7)$$

Продольная деформация изолированных стержней или стержневых систем, вызываемая внешними силами, может сопровождаться изменением температуры. Определяя перемещения в таких системах, следует к абсолютным удлинениям, обусловленным продольными силами, добавить температурные удлинения $\alpha\ell t^\circ$ (α – коэффициент температурного расширения материала, t° – изменение температуры для рассматриваемого стержня), т.е. считаем

$$\Delta\ell=\frac{N\,\ell}{EF}+\alpha\ell t^\circ. \qquad (I.8)$$

ПРИМЕР I.I. Построить эпюру продольных перемещений для стержня ступенчато-переменного сечения (рис.I.3,а).

Задано: $P = 75$ кН; $F_1 = F_4 = 18$ см^2; $F_2 = F_3 = 0{,}7\,F_1$;
$\ell_1 = 1$ м; $\ell_2 = \ell_3 = 0{,}5$ м; $\ell_4 = 1$ м;
$E = 2\cdot10^5$ МПа.

Р е ш е н и е. Исходные данные к настоящему примеру взяты из примеров 2.8 и 3.I части I методических указаний для дополнения расчета исследованием деформированного состояния.

Определим абсолютные удлинения четырех характерных участков по закону Гука (I.4). Эпюра продольных сил приведена на рис.I.3,б.

Участок I: $0<x<\ell_1$, $N_1=-0{,}6P$, $\Delta\ell_1=\dfrac{N_1\ell_1}{EF_1}=\dfrac{-75\cdot10^3\cdot1\cdot10^3}{2\cdot10^5\cdot18\cdot10^2}=-0{,}125$ мм.

Участок 2: $\ell_1<x<\ell_1+\ell_2$, $N_2=0{,}8P$, $\Delta\ell_2=\dfrac{N_2\ell_2}{EF_2}=\dfrac{0{,}8\cdot75\cdot10^3\cdot0{,}5\cdot10^3}{2\cdot10^5\cdot0{,}7\cdot18\cdot10^2}=$
$=0{,}119$ мм.

Участок 3: $\ell_1+\ell_2<x<\ell_1+\ell_2+\ell_3$, $N_3=2P$,

$$\Delta\ell_3=\frac{N_3\ell_3}{EF_3}=\frac{2\cdot75\cdot10^3\cdot0{,}5\cdot10^3}{2\cdot10^5\cdot0{,}7\cdot18\cdot10^2}=0{,}298 \text{ мм}.$$

Участок 4: $\ell_1+\ell_2+\ell_3<x<\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4$, $N_4=2P$,

$$\Delta\ell_4=\frac{N_4\ell_4}{EF_4}=\frac{2\cdot75\cdot10^3\cdot1\cdot10^3}{2\cdot10^5\cdot18\cdot10^2}=0{,}417 \text{ мм}.$$

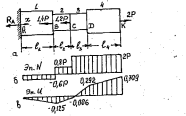

Рис.I.3. К примеру I.I

Определим перемещения характерных сечений по формуле (I.6):
сечение А: $x=0$, $u_A=0$;
сечение В: $x=\ell_1=1$м, $u_B=\Delta\ell_1=-0{,}125$ мм;
сечение С: $x=\ell_1+\ell_2=1{,}5$ м, $u_C=\Delta\ell_1+\Delta\ell_2=-0{,}006$ мм;

сечение D: $x=\ell_1+\ell_2+\ell_3=2$ м, $u_D=\Delta\ell_1+\Delta\ell_2+\Delta\ell_3=0{,}292$ мм;
сечение K: $x=\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4=3$ м, $u_K=\Delta\ell_1+\Delta\ell_2+\Delta\ell_3+\Delta\ell_4=$ $=0{,}709$ мм.

Поскольку на каждом из участков перемещения изменяются по линейному закону, для построения эпюры $u(x)$ откладываем в масштабе найденные перемещения и соединяем их для каждого из участков прямой линией (рис.I.3,в).

По эпюре перемещений для всего стержня легко найти и перемещение произвольной точки. Из сопоставления эпюр $N(x)$, $u(x)$ видно, что большей по абсолютной величине продольной силе соответствует больший угол наклона линии изменения перемещений (сравнить участки 2 и 3). При изменении знака N изменяется направление приращения перемещений (сравнить участки I и 2). При изменении площади сечения на участках $N=\mathrm{const}$ меньшей площади сечения соответствует большая интенсивность изменения перемещений (сравнить участки 3 и 4).

ПРИМЕР I.2. Стержень переменного сечения вставлен с зазором Δ между абсолютно жесткими опорами. При нагружении силами P (рис.I.4) зазор исчезает. Определить перемещение точки A ($x_A=\ell/2$).

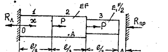

Рис.I.4. К примеру I.2

Задано: $P=80$ кН; $\ell=6$ м; $\Delta=0{,}8$ мм; $F=10$ см^2; $E=2\times10^5$ МПа.

Р е ш е н и е. Отсутствие зазора после нагружения указывает на два обстоятельства.

I. Ввиду того, что на опорах возникают две реакции R_Λ и $R_{пр}$, стержень является статически неопределимым:

$$R_\Lambda+R_{пр}=2P.$$

Степень статической неопределимости (ССН) равна I.

2. Перемещение правого торца нагруженного стержня равно зазору Δ, откуда уравнение совместности перемещений согласно (I.6) записываем в виде

$$u(\ell)=\Delta\ell_1+\Delta\ell_2+\Delta\ell_3=\Delta,$$

где $\Delta\ell_i=\dfrac{N_i\ell_i}{EF_i}$ $(i=1,2,3)$; $\ell_1=\ell_2=\ell_3=\ell/3$; $F_1=F_2=2F_3=F$.

Продольные силы для каждого из участков определяем методом сечений:
при $0<x<\ell/3$ $N_1=R_\Lambda$; при $\ell/3<x<2\ell/3$ $N_2=R_\Lambda-P$;
при $2\ell/3<x<\ell$ $N_3=R_\Lambda-2P$.
После подстановок в уравнение совместности имеем

$$\frac{R_\Lambda\ell}{3EF}+\frac{(R_\Lambda-P)\ell}{3EF}+\frac{2(R_\Lambda-2P)\ell}{3EF}=\Delta$$

и далее последовательно получаем

$$R_\Lambda=\frac{1}{4}(5P+3EF\cdot\Delta/\ell)=\frac{1}{4}(5\cdot80+3\cdot2\cdot10^2\,10^3\,0{,}8/6\cdot10^3)=120\text{ кН},$$

$$N_1=120\text{ кН},\quad N_2=40\text{ кН},\quad N_3=-40\text{ кН}.$$

Перемещение точки A вычисляем как сумму абсолютного удлинения всего участка I и части участка 2 длиной $x_A-\ell_1=\ell/6=$ I м:

$$u_A=\frac{N_1\ell}{3EF}+\frac{N_2\ell}{6EF}=\frac{120\cdot6\cdot10^3}{3\cdot2\cdot10^2\,10^3}+\frac{40\cdot6\cdot10^3}{6\cdot2\cdot10^2\,10^3}=1{,}4\text{ мм}.$$

ПРИМЕР I.3. Абсолютно жесткий брус AB удерживается в горизонтальном положении растяжимым стержнем CD (фиг.I.5,а). Определить перемещение точки C после нагружения системы силой P и нагрева упруго-деформируемого стержня CD. Все соединения шарнирные.

Задано: a = 4 м; ℓ = 3 м; F = I2 см^2; E = 2·I0^5 МПа;
α = I25xI0^{-7} I/град; $t°$ = 40^{0}С; P = I00 кН.
φ = 30^0.

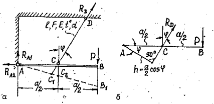

Рис.I.5. К примеру I.3: а - схема нагружения и перемещения; б - к записи уравнения моментов относительно точки А

Р е ш е н и е. В рассматриваемой системе нерастяжимый брус АВ поворачивается вокруг шарнира А по часовой стрелке. Так как стержень CD приобретает очень малые удлинения, можно считать, что точка С перемещается по вертикали (по очень малой дуге окружности с центром А и радиусом АС). Определяем полное удлинение стержня CD с учетом температурной деформации по формуле (I.8), в которой N - продольная сила, равная реакции R_D со стороны верхнего шарнира (это очевидно при разрезании стержня CD произвольным сечением и уравновешивании его верхней части). Находим R_D из уравнения *моментов всех сил относительно точки А (рис.I.5,б):*
$R_D a/2\cos\varphi - Pa = 0$, откуда

$$N = R_D = 2P/\cos\varphi = \frac{2\cdot 100}{0{,}866} = 231 \text{ кН},$$

и далее по (I.8) удлинение стержня CD равно

$$\Delta\ell = \frac{231\cdot 10^3\cdot 3\cdot 10^3}{2\cdot 10^5\cdot 12\cdot 10^2} + 125\cdot 10^{-7} 3\cdot 10^3 40 = 4{,}39 \text{ мм}.$$

На рис.I.5,а отрезок CC_1 соответствует удлинению $\Delta\ell$ стержня CD , происходящему в направлении своей первоначальной оси. Для определения действительного положения точки С после нагружения надо провести дугу окружности с центром в точке D и радиусом $r = DC + CC_1 = \ell + \Delta\ell$ до пересечения с перпендикуляром к брусу АВ , опущенным из точки С . Точка пересечения этих линий C_2 соответствует положению точки С для деформированной системы.

Ввиду малости деформаций дугу C_1C_2 можно рассматривать как перпендикуляр к радиусу C_1D , поэтому треугольник CC_1C_2 - прямоугольный ($\angle CC_1C_2$ = 90^0, $\angle C_1CC_2 = \varphi$ = 30^0). Отсюда полное перемещение точки С

$$CC_2 = \frac{CC_1}{\cos\varphi} = \frac{\Delta\ell}{\cos\varphi} = \frac{4{,}39}{0{,}866} = 5{,}07 \text{ мм}$$

I.2. Кручение цилиндрического стержня

Расчет выполняется аналогично тому, как это было указано для случая продольного нагружения.

При скручивании моментом $\mathfrak{m}$ цилиндрического стержня, изображенного на рис.I.6,а, все его точки находятся в состоянии чистого плоского сдвига. Длина стержня не изменяется, сечения остаются плоскими, а все радиусы прямыми. Угол сдвига для образующей боковой поверхности при малых углах закручивания ($\gamma \approx \mathrm{tg}\,\gamma$, $\theta_x \approx \mathrm{tg}\,\theta_x$) определяется соотношением

$$\gamma = \theta_x(\ell)\cdot d/2\ell, \tag{I.9}$$

где $\theta_x(\ell)$ - полный угол закручивания свободного торца стержня относительно неподвижного в защемлении ($x = 0$); d - диаметр; ℓ - длина.

Подстановка γ и наибольших касательных напряжений для точек наружной поверхности (рис.I.6,б)

$$\tau_{max} = \frac{M_x}{J_p}\,\frac{d}{2}$$

(M_x - крутящий момент, $J_p = \frac{\pi d^4}{32}$ - полярный момент инерции) определяет угол закручивания в виде

$$\theta_x(\ell) = \frac{M_x \ell}{G J_p}, \qquad (I.10)$$

где знаменатель характеризует жесткость скручиваемого стержня. Поскольку в рассматриваемом случае $M_x = m = const$, то очевидно, что для любого промежуточного по длине сечения угол закручивания

$$\theta_x(x) = \frac{m x}{G J_p}.$$

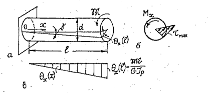

Рис.I.6. Кручение цилиндрического стержня (а), напряжения в сечении (б) и эпюра углов поворота сечений (в)

Эпюра изменения θ_x изображена на рис.I.6в. Для цилиндрического стержня ступенчато переменного сечения, нагруженного произвольным числом сосредоточенных скручивающих моментов, угол закручивания определяется суммой абсолютных приращений

$$\theta_x(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{M_{xi} \ell_i}{G J_{pi}}, \qquad (I.11)$$

где n - число промежуточных участков между неподвижным и рассматриваемым сечениями.

В общем случае скручивания стержня с переменной жесткостью

$$\theta_x(x) = \int_0^x \frac{M_x(x)}{G J_p(x)}\, dx.$$

ПРИМЕР I.4. Построить эпюру изменения углов поворота θ_x поперечных сечений скручиваемого стержня, изображенного на рис.I.7,а.

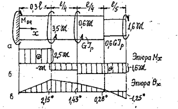

Рис.I.7. К примеру I.4

Задано: $m = 80$ кН·м; $\ell = 8$ м; $GJ_p = 1{,}28 \cdot 10^4$ кН·м².

Решение. Реактивный момент в защемлении определяем из уравнения равновесия

$$\sum Mom0X = M_{оп} - 3{,}5m - 0{,}6m + 1{,}6m = 0,$$

откуда $M_{оп} = 2{,}5m = 2{,}5 \cdot 80 = 200$ кН м.

Крутящие моменты M_x в поперечных сечениях стержня находим методом сечений. Воспользуемся правилом записи для всех участков в одну строку

$$M_x(x) = M_{оп}\Big|_{x>0,3\ell} - 3{,}5m\Big|_{x>0,55\ell} - 0{,}6m.$$

Эпюра изменения крутящих моментов (рис.I.7,б) необходима для последующей проверки характера изменения θ_x по длине стержня.

Приращение угла закручивания θ_{xi} для каждого из четырех участков стержня (обозначены на рис.I.7,а) определяется по формуле (I.I0).

Участок I: $0<x<0{,}3\ell$; $\ell_1 = 2{,}4$ м; $M_{x1} = 2{,}5\ \mathfrak{M} = 200$ кН·м;

$$GJ_{p1} = 1{,}28\cdot 10^4\ \text{кН·м}^2;\quad \theta_{x1} = \frac{M_{x1}\ell_1}{GJ_{p1}} = \frac{2000^6\,2{,}4\cdot 10^3}{1{,}28\,10^4\,10^9} =$$

$$= 0{,}0375\ \text{рад} = 2{,}15^\circ.$$

Участок 2: $0{,}3\ell < x < 0{,}55\ell$; $\ell_2 = 0{,}25\ell = 2$ м;

$$M_{x2} = -\mathfrak{M} = -80\ \text{кН·м};\quad GJ_{p2} = 1{,}28\cdot 10^4\ \text{кН·м}^2;$$

$$\theta_{x2} = \frac{-80\cdot 10^6\cdot 2\cdot 10^3}{1{,}28\cdot 10^4\cdot 10^9} = -0{,}0125\ \text{рад} = -0{,}72^\circ.$$

Участок 3: $0{,}55\ell < x < 0{,}8\ell$; $\ell_3 = 2$ м;

$$M_{x3} = -1{,}6\ \mathfrak{M} = -128\ \text{кН·м};\quad GJ_{p3} = 1{,}28\cdot 10^4\ \text{кН·м}^2;$$

$$\theta_{x3} = \frac{-128\cdot 10^6\cdot 2\cdot 10^3}{1{,}28\cdot 10^4\cdot 10^9} = -0{,}02\ \text{рад} = -1{,}15^\circ.$$

Участок 4: $0{,}8\ell < x < \ell$; $\ell_4 = 1{,}6$ м; $M_{x4} = -1{,}6\mathfrak{M} = -128$ кН·м;

$$GJ_{p4} = 0{,}6\,GJ_{p1} = 0{,}768\cdot 10^4\ \text{кН·м}^2;$$

$$\theta_{x4} = \frac{-128\cdot 10^6\cdot 1{,}6\cdot 10^3}{0{,}768\cdot 10^4\cdot 10^9} = -0{,}0266\ \text{рад} = -1{,}53^\circ.$$

При известных θ_{xi} углы поворотов произвольных сечений относительно неподвижного торца определяем по формуле (I.II). На торцах и стыках участков имеем:

$x = 0$, $\theta_x(0) = 0$ (защемленный торец);

$x = 0{,}3\ell$, $\theta_x(0{,}3\ell) = \theta_{x1} = 2{,}15^\circ$;

$x = 0{,}55\ell$, $\theta_x(0{,}55\ell) = \theta_{x1} + \theta_{x2} = 1{,}43^\circ$;

$x = 0{,}8\ell$, $\theta_x(0{,}8\ell) = \theta_{x1} + \theta_{x2} + \theta_{x3} = 0{,}28^\circ$;

$x = \ell$, $\theta_x(\ell) = \theta_{x1} + \theta_{x2} + \theta_{x3} + \theta_{x4} = -1{,}25^\circ$.

Эпюра $\theta_x(x)$ изображена на рис.I.7,в. При сравнении θ_x и M_x полезно обратить внимание на следующие закономерности:

I) при изменении знака M_x изменяется направление приращения θ_x (сравнить участки I и 2);

2) при увеличении абсолютного значения M_x на участках постоянной жесткости увеличивается интенсивность приращения θ_x (сравнить участки 2 и 3);

3) при постоянном M_x и уменьшении жесткости увеличивается интенсивность приращения θ_x (сравнить участки 3 и 4).

Для статически неопределимых скручиваемых стержней, аналогичных рассматриваемому в примере 3.5 части III методических указаний, настоящий способ может быть применен для раскрытия статической неопределимости. Очевидно, что сумма приращений углов закручивания всех участков между защемлениями равна нулю.

I.3. Поперечный изгиб. Универсальное уравнение изогнутой оси

При нагружении стержня силами, действующими в плоскости YOX и перпендикулярными продольной оси, возникает чистый (изгибающий момент $M \neq 0$, поперечная сила $Q = 0$) или поперечный изгиб ($M \neq 0$, $Q \neq 0$). Деформированное состояние стержня в обоих случаях определяется двумя параметрами (рис.I.8): вертикальными перемещениями центров тяжести $v = v(x)$ и углами поворотов $\theta_z = \theta_z(x)$ поперечных сечений. По перемещениям v строится изогнутая ось (иначе, упругая линия) стержня. Для выбранных направлений координатных осей положительными являются перемещение v, направленное вверх, и угол θ_z при повороте сечения против часовой стрелки. В технической теории изгиба стержней ($h/\ell < 0{,}1$) пренебрегают влиянием поперечных сил на изгибные перемещения, поэтому считают, что после поворота сечения остаются плоскими и перпендикулярными к изогнутой оси, т.е.

$$\theta_z = \frac{dv}{dx} = v'. \tag{I.12}$$

Из (I.12) видно, что фактически изгибная деформация определяется одной функцией v, при дифференцировании которой находим углы поворота θ_z, уточняющие характер изгиба.

Напряженное состояние изогнутых балок было рассмотрено ранее на основе гипотезы плоских сечений, согласно которой деформация продольных волокон

$$\varepsilon = -\frac{y}{\rho};$$

где y – вертикальная координата точки сечения; ρ – радиус кривизны изогнутой оси.

Подстановка ε в закон Гука (I.2) и далее в условие эквивалентности

$$M = -\int_{(F)} \sigma y \, dF$$

определяет переменную по длине кривизну изогнутой оси

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ}, \qquad (I.13)$$

где EJ – изгибная жесткость стержня.

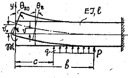

Рис.I.8. Перемещения при изгибе стержня: v – вертикальное; θ_z – угол поворота сечения

Если $M > 0$, то радиус кривизны $\rho > 0$ и изогнутая ось направлена выпуклостью вниз (см.рис.I.8), если $M < 0$ – выпуклостью вверх.

В математике выводится выражение для вычисления кривизны любой плоской кривой. Используя его для изогнутой оси стержня, определяемой функцией $v = v(x)$, находим

$$\frac{1}{\rho} = \frac{v''}{\left[1 + (v')^2\right]^{3/2}}.$$

При малых изгибных деформациях $(v')^2 << 1$, поэтому считаем

$$\frac{1}{\rho} = v''. \qquad (I.14)$$

Сравнивая (I.13) и (I.14), получаем дифференциальное уравнение изгиба

$$EJv'' = M, \qquad (I.15)$$

которое для призматических стержней $EJ = const$ легко интегрируется:

$$\theta_z = v' = \theta_{z0} + \frac{1}{EJ}\int_0^x M\,dx;$$
$$v = v_0 + \theta_{z0}x + \frac{1}{EJ}\int_0^x\int_0^x M\,dx\,dx, \qquad (I.16)$$

где v_0 и θ_{z0} – постоянные интегрирования, всегда равные вертикальному перемещению и углу поворота торцевого поперечного сечения, расположенного в начале координат $(x = 0)$.

Постоянные v_0 и θ_{z0} определяются после подстановки известных условий закрепления стержня в (I.16). В точках шарнирного опирания стержней $v = 0$; в защемлениях $v = 0$ и $\theta_z = 0$ (на рис.I.8 при $x = \ell$).

Результат интегрирования M в (I.16) для любых сочетаний, направлений и числа внешних нагрузок $\mathfrak{M}, P, q = const$, вызывающих поперечный изгиб, можно представить однотипными выражениями. Поэтому, опуская выводы, приведем универсальные уравнения для вычисления v и θ_z

$$\theta_z = \theta_{z0} \pm \sum_i \left|_{x>a_i} \frac{\mathfrak{M}_i(x-a_i)}{EJ} \pm \sum_j \right|_{x>b_j} \frac{P_j(x-b_j)^2}{2EJ} \pm \sum_k \Big|_{x>c_k} \frac{q_k(x-c_k)^3}{6EJ}, \qquad (I.17а)$$

$$v = v_0 + \theta_{z0}x \pm \sum_i \left|_{x>a_i} \frac{\mathfrak{M}_i(x-a_i)^2}{2EJ} \pm \sum_j \right|_{x>b_j} \frac{P_j(x-b_j)^3}{6EJ} \pm \sum_k \Big|_{x>c_k} \frac{q_k(x-c_k)^4}{24EJ}, \qquad (I.17б)$$

где a_i, b_j, c_k – продольные координаты точек приложения сосредоточенных моментов $\mathfrak{M}_i$, сил P_j, а также координата начала участка с распределенной нагрузкой $q_k = const$.

Сосредоточенные внешние или реактивные моменты и силы, приложенные к стержню на торце, противоположном началу координат, в (I.15) не входят. Знаки (+) или (–) в (I.17) совпадают со знаком перед рассматриваемой нагрузкой в формуле для изгибающего момента M. Для нагрузок, направленных так же, как и на рис.I.8, ставим знак (+). Следует особо обратить внимание на то, что каждая из нагрузок в универсальных уравнениях (I.I7) учитывается в расчете только тогда, когда продольная координата x рассматриваемого сечения становится больше, чем координата a_i, b_j или c_k точки приложения данной нагрузки. Для распределенных нагрузок q, действующих только на части длины стержня, необходимо достраивать их до конца, противоположного началу координат, и одновременно, обеспечивая равновесие, на том же участке, прикладывать к стержню нагрузку противоположного направления. В частности, для стержня, изображенного на рис.I.8, этот прием приводит к измененной схеме нагружения (рис.I.9) и уравнению изогнутой оси

$$v(x) = v_0 + \theta_{z0} x + -\frac{\mathfrak{m} x^2}{2EJ} \Big|_{x>c} + \frac{q(x-c)^4}{24EJ} \Big|_{x>b} - \frac{q(x-b)^4}{24EJ} + \frac{P(x-b)^3}{6EJ}$$

Отметим, что выражения, определяющие θ_z, получаются из выражения для $v(x)$ дифференцированием па основании (I.I2).

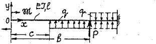

Рис.I.9. К вопросу о достраивании распределенной нагрузки

ПРИМЕР I.5. Построить эпюру изменения вертикальных перемещений v и углов поворота θ_z поперечных сечений стержня, изображенного на рис.I.10,а.

Задано: $\mathfrak{m}$ = 90 кН·м; P = 30 кН; q = 60 кН/м; ℓ = 3 м, сечение – двутавр № 27; E = $2\cdot10^5$ МПа; [σ] = 200 МПа.

Р е ш е н и е. По характеру заданной нагрузки определяем, что стержень разделяется на 3 характерных участка ($x<\frac{\ell}{3}$, $\frac{\ell}{3}<x<\frac{5\ell}{6}$, $x=\frac{5\ell}{6}$). Запишем формулу для вычисления изгибающего момента в одну строку с разделителями при переходе от участка к участку:

$$M = 0 \Big|_{x>\frac{\ell}{3}} + P\left(x-\frac{\ell}{3}\right) - \frac{q(x-\ell/3)^2}{2} \Big|_{x=2\ell/3} + \mathfrak{m}.$$

Эпюра M изображена на рис.I.10,б, на эпюре M_{max} = 67,5 кН·м. Для двутавра № 27 по сортаменту находим J = 5010 см^4 и W = = 371 см^3. Условие прочности для стержня

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W} = \frac{67{,}5\cdot10^6}{371\cdot10^3} = 182 < [\sigma] = 200\ \text{МПа}$$

выполняется, следовательно, заданной нагрузке должна соответствовать упругая деформация стержня.

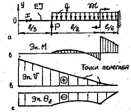

Рис.I.10. К примеру I.5

Универсальные уравнения для изогнутой оси и углов поворота сечений (I.I7) для рассматриваемого стержня имеют вид

$$v = v_0 + \theta_{z0} x \Big|_{x>\ell/3} + \frac{P(x-\ell/3)^3}{6EJ} - \frac{q(x-\ell/3)^4}{24EJ} \Big|_{x>\frac{5\ell}{6}} + \frac{\mathfrak{m}(x-\frac{5\ell}{6})^2}{2EJ},$$

$$\theta_z = \theta_{z0} \Big|_{x>\ell/3} + \frac{P(x-\ell/3)^2}{2EJ} - \frac{q(x-\ell/3)^3}{6EJ} \Big|_{x>\frac{5\ell}{6}} + \frac{\mathfrak{m}(x-\frac{5\ell}{6})}{EJ}.$$

Защемление стержня на правом торце позволяет записать два условия закрепления: I) $x=\ell$, $v=0$; 2) $x=\ell$, $\theta_z=0$.

Подставляя первое условие закрепления в уравнение для v, а второе в формулу для θ_z и заменяя x на ℓ, имеем:

$$v_0+\theta_{z0}\ell+\frac{P(\ell-\ell/3)^3}{6EJ}-\frac{q(\ell-\ell/3)^4}{24EJ}+\frac{m(\ell-\frac{5\ell}{6})^2}{2EJ}=0;$$

$$\theta_{z0}+\frac{P(\ell-\ell/3)^2}{2EJ}-\frac{q(\ell-\ell/3)^3}{6EJ}+\frac{m(\ell-\frac{5\ell}{6})}{EJ}=0.$$

Последние два равенства представляют собой систему, из решения которой определяем неизвестные v_0 и θ_{z0}. Последовательно вычисляем из второго равенства угол поворота торцевого сечения $x = 0$ (подстановку числовых значений опускаем):

$$\theta_z(0)=\theta_{z0}=-\frac{2P\ell^2}{9EJ}+\frac{4q\ell^3}{81EJ}-\frac{m\ell}{6EJ}=-2{,}5\cdot10^{-3}\,\text{рад}.$$

Подставляя θ_{z0} в первое из уравнений системы, находим вертикальное перемещение сечения $x = 0$:

$$v(0)=v_0=-\theta_{z0}\ell-\frac{4P\ell^3}{81EJ}+\frac{2q\ell^4}{243EJ}-\frac{m\ell^2}{72EJ}=6{,}38\ \text{мм}.$$

Запишем формулы и результаты расчета перемещений для стыков трех участков стержня: $x=\frac{\ell}{3}$, $v(\frac{\ell}{3})=v_0+\theta_{z0}\frac{\ell}{3}=3{,}88$ мм;

$$\theta_z\left(\frac{\ell}{3}\right)=\theta_{z0}=-2{,}5\cdot10^{-3}\,\text{рад};$$

$$x=\frac{5\ell}{6},\quad v\left(\frac{5\ell}{6}\right)=v_0+\theta_{z0}\frac{5\ell}{6}+\frac{P\ell^3}{48EJ}-\frac{q\ell^4}{384EJ}=1{,}63\ \text{мм},$$

$$\theta_z\left(\frac{5\ell}{6}\right)=\theta_{z0}+\frac{P\ell^2}{8EJ}-\frac{q\ell^3}{48EJ}=-2\cdot10^{-3}\,\text{рад}.$$

Ниже приведена табл.I.I численных значений v и θ_z, по которым на рис.I.I0,в и I.I0,г построены эпюры $v(x)$ и $\theta_z(x)$.

Таблица I.I

x, м	0	I	I,5	2	2,25	2,5	2,75	3
v, мм	6,38	3,88	2,68	I,63	I,I4	0,55	0,I2	0
$\theta_z \cdot 10^3$	-2,5	-2,5	-2,25	-2	-2,I2	-2,49	-I,02	0

После выполнения расчетов необходимо проверить эпюры M, θ_z и v на соответствие друг другу. В частности, при равенстве в поперечном сечении M нулю или изменении его знака согласно (I.I3) радиус кривизны изогнутой оси $\rho=\infty$ и изогнутая ось стержня должна иметь точку перегиба (см. точки $x = 2$ м и $x = 2{,}5$ м). На участке $0<x<\frac{\ell}{3}$ где $M = 0$, стержень не изгибается, а перемещается в плоскости нагружения как абсолютно жесткое тело ($\theta_z=\text{const}$ и v изменяются по линейному закону). При сохранения знака θ_z по длине всего стержня или какого-либо его участка вертикальные перемещения изменяются в одном направлении.

ПРИМЕР I.6. Определить наибольшее вертикальное перемещение и проверить жесткость изгибаемого цилиндрического стержня, изображенного на рис.I.II,а.

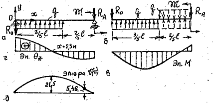

Рис.I.II. К примеру I.6

Задано: m = I5 кН·м; q = 30 кН/м; ℓ = 5 м; d = = I6 см; E = $2\cdot10^5$ МПа; допускаемое перемещение $[v]$ = 25 мм.

Р е ш е н и е. Определяем опорные реакции R_0 и R_A из уравнений равновесия стержня

$$\sum \text{Пр}y=R_0+R_A-\frac{3}{5}q\ell=0,\quad \sum \text{Мом}A=R_0\ell+m-\frac{3}{5}q\ell\cdot\frac{7}{10}\ell=0,$$

откуда R_0 = 60 кН и R_A = 30 кН.

Продлеваем нагрузку q первого участка стержня ($0<x<0{,}6\ell$) на второй ($0{,}6\ell<x<\ell$) и для сохранения равновесия нагружаем второй участок нагрузкой q, действующей сверху вниз (рис.I.II,б). Записываем уравнение для вычисления изгибающих моментов в одну строку:

$$M(x) = -R_0 + \frac{q x^2}{2}\Big|_{x>0{,}6\ell} - \frac{q(x-0{,}6\ell)^2}{2}$$

и строим эпюру M (рис.I.II,в).

Уравнение изогнутой оси стержня на основании (I.I7) имеет вид

$$v = v_0 + \theta_{z0} x - \frac{R_0 x^3}{6EJ} + \frac{q x^4}{24EJ}\Big|_{x>0{,}6\ell} - \frac{q(x-0{,}6\ell)^4}{24EJ}.$$

Подставим условия закрепления стержня в торцевых сечениях (при $x = 0$ $v(0) = 0$ и при $x = \ell$ $v(\ell) = 0$) в уравнение изогнутой оси. Получим

$$v(0) = v_0 = 0\ ;\ v(\ell) = v_0 + \theta_{z0}\ell - \frac{R_0\ell^3}{6EJ} + \frac{q\ell^4}{24EJ} - \frac{q(0{,}4\ell)^4}{24EJ} = 0.$$

Поскольку $v_0 = 0$, с учетом $EJ = E\,\pi d^4/64 = 6{,}43\cdot10^3$ кН·м^2 получаем

$$\theta_{z0} = \frac{R_0\ell^2}{6EJ} - \frac{q\ell^3}{24EJ} + \frac{2q\ell^3}{1875EJ} = 0{,}0152 \text{ рад}.$$

По эпюре изгибающих моментов видно, что на большей части стержня $M<0$, следовательно, изогнутая ось должна быть направлена выпуклостью вверх. Такому искривлению оси должны соответствовать перемещения $v>0$. Экстремальным значениям v в свою очередь, соответствуют углы поворота сечений $\theta_z = 0$. Определим расположение по длине таких сечений из второго универсального уравнения (I.I7а), записываемого для θ_z нашего стержня (θ_{z0} найдено выше)

$$\theta_z = \theta_{z0} - \frac{R_0 x^2}{2EJ} + \frac{q x^3}{6EJ}\Big|_{x>0{,}6\ell} - \frac{q(x-0{,}6\ell)^3}{6EJ}.$$

Строим эпюру изменения θ_z по длине (рис.I.II,г) и, уточняя значения по универсальному уравнению, находим, что $\theta_z = 0$ только в одной точке $x = 2{,}3$ м. Вычисляем наибольшее вертикальное перемещение при $x = 2{,}3$ м:

$$v_{max} = v_0 + \theta_{z0}\cdot2{,}3\cdot10^3 - \frac{R_0\cdot2{,}3^2\cdot10^9}{6EJ} + \frac{q\cdot2{,}3^4\cdot10^{12}}{24EJ} = 21{,}5 \text{ мм}.$$

Жесткость стержня обеспечена, так как $v_{max} < [v] = 25$ мм.

Для уточнения изогнутой оси целесообразно найти v для точки перегиба ($x = 4{,}5$ м, $M = 0$)

$$v(4{,}5) = v_0 + \theta_{z0}\cdot4{,}5\cdot10^3 - \frac{R_0\cdot4{,}5^3\cdot10^9}{6EJ} + \frac{q\cdot4{,}5^4\cdot10^{12}}{24EJ} - \frac{q\cdot1{,}5^4\cdot10^{12}}{24EJ} = 5{,}46 \text{ мм}.$$

Эпюра перемещений v изображена на рис.I.II,д.

Проверить соответствие между M, θ_z и v самостоятельно.

ПРИМЕР I.7. Построить изогнутую ось стержня, изображенного на рис.I.I2,а по перемещениям v характерных точек (концы консолей, середина пролета, точки перегибов).

Задано: $\ell = 8$ м; $P_1 = 20$ кН; $P_2 = 95$ кН; $P_3 = 30$ кН; $\mathfrak{M}_1 = 30$ кН·м; $\mathfrak{M}_2 = 20$ кН·м; $q_1 = 20$ кН/м; $q_2 = 10$ кН/м; $EJ = 9{,}32\cdot10^3$ кН·м^2.

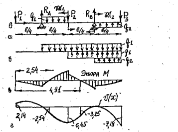

Рис.I.I2. К примеру I.7

Р е ш е н и е. Определяем опорные реакции из уравнений равновесия стержня:

$$\sum \text{Пр}\, y = -P_1 + R_A - q_1 \ell/2 - P_2 + R_B + q_2 \ell/2 - P_3 = 0;$$

$$\sum \text{Мом}.B = P_1 \frac{3\ell}{4} - R_A \frac{\ell}{2} - q_1 \frac{\ell}{4}\frac{3\ell}{8} - \mathfrak{M}_1 - P_2 \frac{\ell}{4} + \mathfrak{M}_2 - q_2 \frac{\ell}{4}\cdot\frac{\ell}{8} + P_3 \frac{\ell}{4} = 0,$$

откуда $R_A = 100$ кН и $R_B = 50$ кН.

Достраиваем распределенную нагрузку, действующую на участке 2 $(\ell/4 < x < \ell/2)$ стержня до правого конца в соответствии с требованиями к расчету v (рис.I.I2,б).

Записываем уравнение для M в одну строку:

$$M(x) = -P_1(x)\Big|_{x>\ell/4} + R_A(x-\ell/4) - \frac{q_1(x-\ell/4)^2}{2}\Big|_{x>\ell/2} - \mathfrak{M}_1 - P_2(x-\ell/2) + \frac{q_1(x-\ell/2)^2}{2}\Big|_{x>3\ell/4} + R_B(x-3\ell/4) + \mathfrak{M}_2 + \frac{q_2(x-3\ell/4)^2}{2}$$

и строим эпюру (рис.I.I2,в), указывая на ней ординаты (x, M) характерных точек.

Уравнение изогнутой оси стержня имеет вид

$$v(x) = v_0 + \theta_{z0} x - \frac{P_1 x^3}{6EJ}\Big|_{x>\ell/4} + \frac{R_A(x-\ell/4)^3}{6EJ} - \frac{q_1(x-\ell/4)^4}{24EJ}\Big|_{x>\ell/2} - \frac{\mathfrak{M}_1(x-\ell/2)^2}{2EJ} - \frac{P_2(x-\ell/2)^3}{24EJ} + \frac{q_1(x-\ell/2)^4}{24EJ}\Big|_{x>3\ell/4} + \frac{R_B(x-3\ell/4)^3}{6EJ} + \frac{\mathfrak{M}_2(x-3\ell/4)^2}{24EJ} + \frac{q_2(x-3\ell/4)^4}{24EJ}.$$

Перемещения левого конца стержня $v(0) = v_0$ и $\theta_z(0) = \theta_{z0}$ определяем из граничных условий при $x = \ell/4$ $v = 0$ и при $x = 3\ell/4$ $v = 0$. Получаем систему

$$v_0 + \theta_{z0}\ell/4 - \frac{P_1(\ell/4)^3}{6EJ} = 0,$$

$$v_0 + \theta_{z0} 3\ell/4 - \frac{P_1\left(\frac{3\ell}{4}\right)^3}{6EJ} + \frac{R_A\left(\frac{\ell}{2}\right)^3}{6EJ} - \frac{q_1\left(\frac{\ell}{2}\right)^4}{24EJ} - \frac{\mathfrak{M}_1\left(\frac{\ell}{2}\right)^2}{2EJ} - \frac{P_2\left(\frac{\ell}{4}\right)^3}{6EJ} + \frac{q_1\left(\frac{\ell}{4}\right)^4}{24EJ} = 0,$$

решая которую находим $v_0 = 2{,}14$ мм, $\theta_{z0} = 0{,}36\cdot 10^{-3}$ рад. Вычисляем перемещения при $x_1 = 2{,}54$ м (первая точка перегиба), $x_2 = 4$ м (середина пролета), $x_3 = 4{,}91$ (вторая точка перегиба), $x_4 = 8$ м (конец правой консоли):

$$v(x_1) = v_0 + \theta_{z0} x_1 - \frac{P_1 x_1^3}{6EJ} + \frac{R_A(x_1-\ell/4)^3}{6EJ} - \frac{q_1(x_1-\ell/4)^4}{24EJ} = -2{,}54 \text{ мм};$$

$$v(x_2) = v_0 + \theta_{z0} x_2 - \frac{P_1 x_2^3}{6EJ} + \frac{R_A(x_2-\ell/4)^3}{6EJ} - \frac{q_1(x_2-\ell/4)^4}{24EJ} = -6{,}45 \text{ мм};$$

$$v(x_3) = v_0 + \theta_{z0} x_3 - \frac{P_1 x_3^3}{6EJ} + \frac{R_A(x_3-\ell/4)^3}{6EJ} - \frac{q_1(x_3-\ell/4)^4}{24EJ} - \frac{\mathfrak{M}_1(x_3-\ell/2)^2}{2EJ} - \frac{P_2(x_3-\ell/2)^3}{6EJ} + \frac{q_1(x_3-\ell/2)^4}{24EJ} = -3{,}25 \text{ мм};$$

$v(x_4) = -7{,}19$ мм (x_4 подставляем во все слагаемые общей формулы для $v(x)$). Изогнутая ось изображена на рис.I.I2,г.

2. ДИНАМИЧЕСКОЕ НАГРУЖЕНИЕ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Под динамическими понимаются воздействия, при которых телам сообщаются ускорения. В этом случае к напряжениям и перемещениям от активных внешних сил, учитываемым в статических расчетах, *добавляются напряжения и перемещения от сил* инерции, обусловленных ускорениями. Наиболее характерными для стержневых систем являются следующие типы динамических задач.

1. Поступательное движение или вращение вокруг оси, которые происходят с известным и постоянным ускорением.

2. Вынужденные колебания, при которых движение происходит со знакопеременным ускорением, изменяющимся по известному закону.

3. Неупругий удар, движение после которого происходит при трудно поддающихся определению ускорениях.

При разных подходах к решению указанных типов задач в большинстве случаев практические расчеты могут быть сведены к определению коэффициента динамичности системы K_g. Под коэффициентом динамичности понимается величина, на которую следует умножить напряжение или перемещение статически нагруженной системы, чтобы получить напряжение или перемещение, соответствующее динамической нагрузке. Исключением являются задачи о вращении, для которых в статике напряжения и перемещения равны нулю.

При поступательном движении с постоянным ускорением a коэффициент динамичности системы

$$K_g = 1 \pm a/g, \qquad (2.1)$$

где $g = 9{,}81$ м/с^2 – ускорение силы тяжести.

Знаки "+" и "-" в (2.1) соответствуют совпадению или несовпадению направлений активных сил, учитываемых в статике, и сил инерции.

При исследовании вынужденных колебаний систем, приведенных к системам с одной степенью свободы, и пренебрежении влиянием сил неупругого сопротивления на движение

$$K_g = \frac{1}{|1 - \omega^2/\omega_c^2|}, \qquad (2.2)$$

где ω_c – частота собственных колебаний нагружаемой системы; ω – частота изменения возмущающей силы.

При абсолютно неупругом ударе и пренебрежимо малой массе нагружаемой системы по сравнению с массой падающего груза

$$K_g = 1 + \sqrt{1 + 2h/\Delta_{ст}}, \qquad (2.3.а)$$

$$K_g = 1 + \sqrt{1 + v_г^2/g\Delta_{ст}}, \qquad (2.3.б)$$

где $\Delta_{ст}$ – перемещение системы в точке нагружения под действием статически приложенной нагрузки; h – высота, с которой падает груз; $v_г$ – скорость падающего груза к моменту соударения.

Во всех задачах предполагается, что напряженно-деформированное состояние динамически нагруженной системы, так же как и в статике является упругим.

ПРИМЕР 2.1. Лебедка весом $P_л$ установлена на двух уголках № 25/18 (t = 12 мм) и поднимает груз весом $P_{гр}$ с постоянным ускорением a, направленным вверх (рис.2.1,а). Определить максимальные динамические напряжения и перемещение для опорных стержней.

Задано: $\ell = 1{,}5$ м; $P_л = 5$ кН; $P_{гр} = 30$ кН; $a = 4$ м/см^2; $[\sigma] = 200$ МПа.

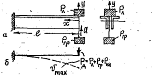

Рис.2.1. К примеру 2.1

Р е ш е н и е. Статическая нагрузка на конце опорных стержней определяется суммарным весом лебедки и груза:

$$P_{ст} = P_л + P_{гр} = 35 \text{ кН}.$$

Собственным весом стержней, равномерно распределенным по длине, пренебрегаем ввиду очень малого влияния на определяемые напряжения и перемещения.

При подъеме груза с ускорением a *помимо сил* $P_л$ и $P_{гр}$ на стержни действует сила инерции, направленная навстречу ускорению $P_{ин} = P_{гр}\, a/g$. Таким образом, общее усилие со стороны поднимаемого груза равно сумме $P_{гр} + P_{ин}$, а напряженно-деформированное состояние стержней определяется силой, которую можно представить в виде (рис.2.1,б).

$$P_g = P_л + P_{гр} + P_{ин} = P_л + P_{гр} K_g,$$

где $K_g = 1 + a/g = 1 + 4/9{,}81 = 1{,}408$ – коэффициент динамичности системы.

Максимальный изгибающий момент действует в защемлении стержней и при подъеме груза равен

$$M_{max} = P_g \ell = (5+30\cdot 1,408)\cdot 1,5 = 70,9 \text{ кН·м}.$$

Находим по сортаменту для уголка изгибаемого в плоскости большего пояска $J = 3147$ см^4 и $W = 185$ см^3. Для сдвоенного уголка момент инерции и момент сопротивления удваиваются. Тогда нормальные напряжения в опасном сечении равны

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{2W} = \frac{70,9\cdot 10^6}{2\cdot 185\cdot 10^3} = 192 \text{ МПа} < [\sigma],$$

и прочность стержней обеспечена.

Вертикальное перемещение v_{max} на конце стержней определяем с помощью универсального уравнения изогнутой оси, записываемого так же, как и в статических задачах. Принимая начало координат на правом конце стержней, имеем

$$v(x) = v_0 + \theta_{z0} - \frac{P_g x^3}{6EJ(2J)}, \quad \theta_z(x) = \theta_{z0} - \frac{P_g x^2}{2E(2J)}.$$

Поскольку при $x=\ell$, $v = 0$ и $\theta_z = 0$, то после соответствующих подстановок получаем абсолютное перемещение вниз на конце:

$$v_{max} = |v_0| = \frac{P_g \ell^3}{3E(2J)} = \frac{47,2\cdot 10^3\cdot 1,5^3\cdot 10^9}{3\cdot 2\cdot 10^5\cdot 2\cdot 3,147\cdot 10^7} + 4,22 \text{ мм}.$$

П р и м е ч а н и е. При оценке прочности троса продольную силу для него следует считать равной $P_{гр}K_g$, а напряжения $\sigma = P_{гр}\cdot K_g / F_{тр}$ ($F_{тр}$ – площадь сечения троса).

ПРИМЕР 2.2. Призматический стальной стержень AB длиной ℓ укреплен на оси $0-0$ и вращается вокруг нее, совершая n оборотов в минуту (рис.2.2,а). Проверить прочность стержня и вычислить радиальное перемещение u свободного торца.

Задано: $\ell = 2,5$ м; $n = 600$ об/мин; $[\sigma] = 100$ МПа.

Р е ш е н и е. При вращении стержня в нем развиваются центробежные силы инерции, направленные от оси $0-0$ в сторону точки B. На элемент длиной dx, расположенный на рас-

стоянии x от точки A, действует сила dP, равная произведению его массы dm на центростремительное ускорение a_n:

$$dm = \frac{\gamma}{g} F dx, \quad a_n = \omega^2 x,$$

где $\gamma = 7,8\cdot 10^{-5}$ Н/мм^3 – удельный вес стали; $g = 9,81$ м/с^2 – ускорение силы тяжести; F – площадь поперечного сечения; $\omega = \frac{2\pi n}{60} = 62,8$ 1/с – угловая скорость вращения стержня.

Получаем $dP = a_n dm = \frac{\gamma}{g} F\omega^2 x\, dx$.

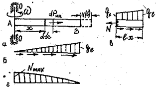

Рис.2.2. К примеру 2.2

Интенсивность сил инерции q изменяется вдоль стержня по линейному закону

$$q(x) = \frac{dP}{dx} = \frac{\gamma}{g} F\omega^2 x.$$

Эпюра q изображена на рис.2.2,б. Продольная сила N в поперечных сечениях стержня определяется, как и в статике, методом сечений. Согласно схеме, изображенной на рис.2.2,в:

$$N = \frac{q(\ell)+q(x)}{2}(\ell - x) = \frac{\gamma F\omega^2}{2g}(\ell^2 - x^2).$$

Из эпюры продольных сил (рис.2.2,г) видно, что максимальное значение N_{max} соответствует опорному сечению ($x = 0$):

$$N_{max} = \frac{1}{2}\frac{\gamma}{g} F\omega^2 \ell^2.$$

Очевидно, что в этом же сечении возникают максимальные нормальные напряжения, т.е.

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{F} = \frac{1}{2}\frac{\gamma}{g}\omega^2 \ell^2.$$

Проверим выполнение условия прочности:

$$\sigma_{max} = \frac{7,8\cdot 10^{-5}}{2\cdot 9,81\cdot 10^3}\cdot 62,8^2\cdot 2,5^2\, 10^6 = 98\ \text{МПа} < [\sigma] = 100\ \text{МПа}.$$

При заданной скорости вращения прочность стержня обеспечена.

Определяем радиальное перемещение u свободного торца по формуле, аналогичной формуле (I.7) для статической нагрузки:

$$u(\ell) = \int_0^{\ell} \frac{\gamma F\omega^2(\ell^2 - x^2)\,dx}{2gEF} = \frac{\gamma\omega^2\ell^3}{3gE} = \frac{7,8\cdot 10^{-5}\cdot 62,8^2\cdot 2,5^3\cdot 10^9}{3\cdot 9,81\cdot 10^3\cdot 2\cdot 10^5} = 0,817\ \text{мм}.$$

Следует обратить внимание на то, что напряжения и перемещения в рассмотренном примере оказываются не зависящими от площади *сечения стержня* F.

ПРИМЕР 2.3. Для стержневой системы ABC, изображенной на рис.2.3,а, используя условие прочности, найти предельное число оборотов вращения n вокруг оси 0-0 и горизонтальное перемещение точки C. Стержень AB считать абсолютно жестким; изгибаемый стальной стержень BC – невесомым и несущим на конце точечный груз P.

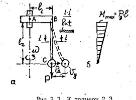

Рис.2.3. К примеру 2.3

Задано: $\ell_1 = 15$ см; $\ell_2 = 50$ см; $t = 5$ мм; $b = 24$ мм; $P = 30$ Н; $[\sigma] = 200$ МПа.

Р е ш е н и е. Стержень BC при вращении системы нагружен силой P, направленной вниз, и центробежной силой *инерции* $P_g = m a_n$, *направленной от оси вращения* ($m = \frac{P}{g}$ – масса груза и $a_n = \omega^2 r$ – центростремительное ускорение для груза, движущегося в горизонтальной плоскости).

Вес стержня BC *прямоугольного сечения* $P_{ст} = \gamma b t \ell_2 = 7,8\cdot 10^{-5}\ 24\cdot 5\cdot 500 = 4,68$ Н. Приводя горизонтальные силы инерции, развивающиеся по высоте стержня к точке C, получаем приведенную горизонтальную силу $P_{ст}^{прив} \approx \frac{1}{4} P_{ст} = 1,17$ Н, которая составляет 3,9% от веса груза P. Поэтому стержень можно считать невесомым.

Под сомножителем r в формуле для a_n следует понимать расстояние от оси вращения 0-0 до груза, определяемое с учетом динамической изгибной деформации v_g стержня BC т.е.

$$r = \ell_1 + v_g.$$

Поскольку стержень BC следует считать жестко защемленным в точке B, а его изгиб в плоскости наименьшей жесткости определяется сосредоточенной силой P_g, действующей на конце, то с помощью универсального уравнения изогнутой оси находим $v_g = \frac{1}{3} P_g \ell_2^3 / EJ$ и далее после подстановок в формулы для r, a_n и P_g находим

$$P_g = \frac{P}{g}\omega^2\left(\ell_1 + \frac{P_g \ell_2^3}{3EJ}\right).$$

Угловая скорость вращения $\omega = \frac{2\pi n}{60}$, момент инерции площади прямоугольного поперечного сечения $J = bt^3/12$, поэтому последняя формула для P_g преобразуется к виду

$$P_g = \frac{P}{\left[\left(\frac{30}{\pi n}\right)^2 \frac{g}{\ell_1} - \frac{4P\ell_2^3}{E\ell_1 b t^3}\right]}$$

Динамическая сила P_g создает в сечениях стержня BC изгибающие моменты, эпюра которых изображена на рис.2.3,б, причем $M_{max} = P_g \ell_2$ и соответствует верхнему сечению B. Запишем для этого сечения условия прочности:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W} = \frac{P_g \ell_2}{W} \leq [\sigma].$$

Момент сопротивления сечения $W = \frac{bt^2}{6}$. Подстановка W и P_g в условие прочности определяет предельное число оборотов для рассматриваемой системы формулой

$$n = \frac{30}{\pi}\left(\sqrt{\frac{6P\ell_2\ell_1}{gbt^2[\sigma]}} + \frac{4P\ell_2^3}{Ebt^3 g}\right)^{-1}.$$

После подстановки исходных данных получаем $n_{max} = 80{,}7$ об/мин. В формуле для n второе слагаемое подкоренного выражения соответствует учету динамического смещения груза v_g от оси недеформированного стержня. Пренебрегая этим перемещением, получаем $n = 89{,}2$ об/мин $> n_{max}$.

Находим перемещение точки C, соответствующее n_{max} (напомним, что $P_g \ell_2 = [\sigma] W$, откуда $P_g = 40$ кН $> P$):

$$v_g = \frac{P_g \ell_2^3}{3EJ} = \frac{[\sigma] W \ell_2^2}{3EJ} = \frac{2[\sigma]\ell_2^2}{3Et} = 33{,}3 \text{ мм}.$$

ПРИМЕР 2.4. Стержневая система (рис.2.4,а) состоит из стальных элементов: вала AD диаметром D и жестко соединенного с ним ломаного стержня BCE диаметром d. Определить предельное число оборотов в минуту вращения системы вокруг оси AD, используя условие $|\sigma|_{max} \leq [\sigma]$.

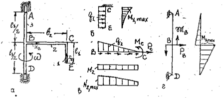

Рис.2.4. К примеру 2.4

Задано: $\ell_1 = 20$ см; $\ell_2 = 40$ см; $\ell_3 = 60$ см; $D = 40$мм; $d = 20$ мм; $\gamma = 7{,}8 \cdot 10^{-5}$ Н/мм^3; $[\sigma] = 100$ МПа.

Р е ш е н и е. Присваиваем стержням номера $i = 1, 2, 3$ и считаем, что деформация каждого из них происходит в плоскости yOx_i (x_i – продольные оси).

При вращении системы на элемент длины dx всех участков действует центробежная сила инерции $dP = a_n dm$, где

$$dm = \frac{\gamma}{g} F dx, \quad a_n = \omega^2 r.$$

Для участка CE: $F = \pi d^2/4$, $r = \ell_2$; для участка BC: $F = \frac{\pi d^2}{4}$, $0 < r < \ell_2$; для участка AD: $F = \frac{\pi D^2}{4}$, $r = 0$. Интенсивность сил инерции по длине участков

$$q = \frac{dP}{dx} = \frac{\gamma}{g} F \omega^2 r.$$

Рассмотрим нагрузку, условие прочности и определим предельное число оборотов вращения для каждого из составляющих стержней.

С т е р ж е н ь CE. По длине участка интенсивность сил инерции q_1 постоянна, и изгибающие моменты изменяются по длине ($0 < x < \ell_1$) по закону

$$M_1 = \frac{q_1 x_1^2}{2}.$$

Схема нагрузки и эпюра моментов показаны на рис.2.4,б. Получаем

$$M_{1max} = \frac{q_1 \ell_1^2}{2} = \frac{\gamma}{8g} \pi d^2 \ell_2 \ell_1 \omega^2.$$

Условие прочности для изгибаемого стержня $\sigma_{1max} = \frac{M_{1max}}{W_1} \leq [\sigma]$. После подстановки M_{1max} и $W_1 = \pi d^3/32$ находим предельную угловую скорость вращения системы относительно оси AD:

$$\omega_{1max} = \sqrt{\frac{[\sigma] g d}{4\gamma \ell_2 \ell_1^2}} = \sqrt{\frac{100 \cdot 9{,}81 \cdot 10^3 \cdot 20}{4 \cdot 7{,}8 \cdot 10^{-5} \cdot 400 \cdot 4 \cdot 10^4}} = 62{,}7 \frac{1}{c}.$$

С т е р ж е н ь BC. По длине участка действует распределенная продольная нагрузка интенсивностью $q_2 = \frac{\gamma}{g} F \omega^2 x_2$

(см.пример 2.2), а в точке C приложены сила P_c и момент $\mathfrak{M}_c$, обусловленные нагрузкой q_1 на участке CE (рис.2.4,в):

$$P_c = q_1 \ell_1 = \frac{\gamma}{g} F \omega^2 \ell_2 \ell_1 ; \quad \mathfrak{M}_c = \frac{q_1 \ell_1^2}{2} = \frac{\gamma}{2g} F \omega^2 \ell_2 \ell_1 .$$

Поэтому в сечениях участка возникают переменные продольные силы $N_2 = P_c + \int_x^{\ell_2} q_2 dx$ и постоянный изгибающий момент $M_2 = \mathfrak{M}_c$ (эпюры на рис.2.4,в). Стержень BC находится в условиях сложного сопротивления. Прочность проверяется формулой

$$\sigma_{2max} = \frac{N_{2max}}{F} + \frac{M_2}{W} \leq [\sigma] ,$$

где F и W – такие же, как и на участке CE.

После всех подстановок получаем для опасного сечения участка ($x = 0$ – точка B)

$$\sigma_{2max} = \frac{\gamma \omega^2}{2g} \ell_2^2 \left(1 + 2\frac{\ell_1}{\ell_2}\right) + \frac{4\gamma}{gd} \omega^2 \ell_2 \ell_1 = [\sigma]$$

и далее

$$\omega_{2max} = \sqrt{\frac{[\sigma] g d}{4\gamma \ell_2 \ell_1^2} \left(\frac{\ell_2 d}{8\ell_1^2} + \frac{d}{4\ell_1} + 1 \right)^{-1}} = 61{,}2 \ 1/c .$$

С т е р ж е н ь AD. Поскольку $q_3 = 0$, то нагрузка участка обусловлена силами инерции, передаваемыми в точке B со стороны участка BC (рис.2.4,г): $P_B = N_{2max} = \frac{\gamma}{2g} F \omega^2 \ell_2^2 \left(1 + 2\frac{\ell_1}{\ell_2}\right)$ - сила, вызывающая поперечный изгиб, $\mathfrak{M}_B = \mathfrak{M}_c$ – момент в точке B (эпюра M_3 на рис.2.4,г). Наибольший изгибающий момент возникает в сечении B и равен

$$M_{3max} = \frac{\mathfrak{M}_B}{2} + \frac{P_B \ell_3}{4} .$$

После подстановки M_{3max} и $W_3 = \frac{\pi D^3}{32}$ в условие прочности

$$\sigma_{3max} = \frac{M_{3max}}{W_3} = \frac{4\gamma}{gd} \omega^2 \ell_2 \ell_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{\ell_2 \ell_3}{\ell_1^2} + 2\frac{\ell_3}{\ell_1} \right) \left(\frac{d}{D}\right)^3 \leq [\sigma]$$

находим

$$\omega_{3max} = \sqrt{\frac{g[\sigma]}{4\gamma \ell_2 \ell_1^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\ell_2 \ell_3}{\ell_1^2} + 2\frac{\ell_3}{\ell_1} \right)^{-1} \left(\frac{D}{d}\right)^3} = 50 \ 1/c .$$

Таким образом, сравнивая $\omega_{i\,max}$, получаем, что наибольшая угловая скорость вращения системы ω_{max} определяется условием прочности участка AD и равна 50 I/с. Предельное число *оборотов в минуту вращающейся системы*

$$n_{max} = \frac{30\,\omega_{max}}{\pi} = 478 \text{ об/мин} .$$

ПРИМЕР 2.5. Для демонстрации вынужденных колебаний на двутавровый стержень установлен электромотор весом P (рис.2.5,а). На расстоянии r от оси электромотора закреплен неуравновешенный груз $Q \ll P$ (рис.2.5,б). Определить число оборотов электромотора, при котором наступает резонанс, и максимальный прогиб при заданном числе оборотов n.

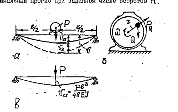

Рис.2.5. К примеру 2.5

Задано: двутавр № 20 ($F = 26{,}8$ см^2; $J = 1840$ см^4; $W = 184$ см^3); $\ell = 3$ м; $E = 2\ 10^5$ МПа; $\gamma = 7{,}8\ 10^{-5}$ Н/мм^3; $P = 4$ кН; $Q = 40$ Н; $r = 5$ см; $n = 1000$ об/мин.

Р е ш е н и е. *При резонансе частота собственных колебаний системы и частота изменения возмущающих сил совпадают, а перемещения и напряжения становятся очень большими.* Найдем частоту собственных колебаний стержня с установленным на нем грузом, как для системы с одной степенью свободы:

$$\omega_c = \sqrt{\frac{C}{M}},$$

где C – жесткость стержня; $M = \frac{P}{g}$ – масса электромотора (массой стержня пренебрегаем).

Под жесткостью стержня следует понимать коэффициент пропорциональности между весом электромотора P и перемещением точки его приложения. Расчет показывает, что при статическом нагружении стержня (рис.2.5,в) в точке $x=\ell/2$ перемещение $v_{ст} = P\ell^3/48EJ$, откуда

$$C = \frac{P}{v_{ст}} = \frac{48EJ}{\ell^3} = \frac{48\cdot 2\cdot 10^5\cdot 1{,}84\cdot 10^7}{27\cdot 10^9} = 6{,}54\cdot 10^3\ Н/мм,$$

Таким образом:

$$\omega_c = \sqrt{\frac{6{,}54\cdot10^3}{4\cdot10^3}\cdot 9{,}81\cdot 10^3} = 127\ 1/с.$$

Резонанс в системе стержень – электромотор наступит, если число оборотов электромотора окажется равным

$$n_{рез} = \frac{30\omega_c}{\pi} = \frac{30\cdot127}{3{,}14} = 1213\ об/мин.$$

При заданном числе оборотов n = 1000 об/мин частота изменения возмущающей силы равна

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{3{,}14\cdot1000}{30} = 105\ 1/с.$$

При включенном электромоторе максимальный прогиб (при $x=\ell/2$) определяется суммой $v = v_{ст} + v_g$, где $v_{ст}$ – статический прогиб стержня, обусловленный весом электромотора; v_g – динамический прогиб (амплитуда вынужденных колебаний), обусловленный возникающей при вращении груза Q вокруг оси электромотора (рис.2.5,б) *центробежной силой* P_Q:

$$P_Q = \frac{Q}{g}\omega^2 r = \frac{40}{9{,}81\cdot10^3}\cdot 105^2\cdot 50 = 2247\ Н.$$

Статический прогиб $v_{ст}^Q$ стержня, соответствующий силе P_Q, вычисляем по формуле, аналогичной прогибу $v_{ст}$ от силы P:

$$v_{ст} = \frac{P}{C} = \frac{4\cdot10^3}{6{,}54\cdot10^3} = 0{,}611\ мм;\quad v_{ст}^Q = \frac{P_Q}{C} = \frac{2247}{6{,}54\cdot10^3} = 0{,}343\ мм.$$

Коэффициент динамичности системы определяется формулой (2.2)

$$K_g = \left[1-\left(\frac{105}{127}\right)^2\right]^{-1} = 3{,}16,$$

поэтому динамический прогиб стержня равен

$$v_g = K_g v_{ст}^Q = 3{,}16\cdot0{,}343 = 1{,}084\ мм$$

и максимальный прогиб

$$v = v_{ст} + K_g v_{ст}^Q = 0{,}611 + 1{,}084 = 1{,}695\ мм.$$

ПРИМЕР 2.6. На двухконсольный двутавр AD падает груз весом P с высоты h (рис.2.6,а). Определить:

1) наибольшее напряжение в стержне и перемещение точки A;

2) жесткость пружины C, устанавливаемой вместо правой неподвижной опоры, при которой перемещение вниз точки A не превышает величины Δ.

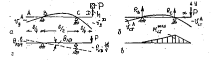

Рис.2.6. К примеру 2.6

Задано: двутавр № I0 ($F = 12$ см^2, $J = 198$ см^4, $W = 39{,}6$ см^3); $[\sigma] = 200$ МПа; $\ell = 2$ м; $h = 30$ мм; $P = 1$ кН; $\Delta = 1$ мм; $\gamma = 7{,}8\cdot 10^{-5}$ Н/мм^3.

Р е ш е н и е. Общий вес стержня $P_{ст} = \gamma F \ell = 0{,}187$ кН значительно меньше P и равномерно распределен по длине, *его влиянием на напряжения и перемещения пренебрегаем.*

Определим наибольшие динамические напряжения $\sigma_{g\,max}$ в стержне по формуле

$$\sigma_{g,max} = K_g \sigma_{ст,max},$$

где для $\left|2h/v_{ст}^D\right| \gg 1$ коэффициент динамичности системы равен

$$K_g = 1 + \sqrt{2h/\left|v_{ст}^D\right|};$$

$\sigma_{ст,max}$ и $v_{ст}^D$ – наибольшее напряжение и абсолютное перемещение точки D стержня, нагруженного статически приложенной силой P (рис.2.6,б). При статической нагрузке опорные реакции равны $R_B = -P/2$ $R_C = 3P/2$. Строим эпюру изгибающих моментов (рис.2.6,в) и в опасном сечении C, где наибольший изгибающий момент $M_{ст\,max} = P\ell/4 = 0{,}5$ кН·м, находим напряжение

$$\sigma_{ст,max} = \frac{M_{ст\,max}}{W} = \frac{0{,}5\cdot 10^6}{39{,}6\cdot 10^3} = 12{,}6 \text{ МПа}.$$

Видно, что $\sigma_{ст,max} \ll [\sigma]$, значит, прочность стержня обеспечена и статической нагрузке соответствует упругая деформация. Для определения статических перемещений запишем уравнение изогнутой оси, принимая за начало координат точку D:

$$v_{ст}(x) = v_0 + \theta_{z0}x - \frac{Px^3}{6EJ}\Bigg|_{x>\ell/4} + \frac{R_C(x-\ell/4)^3}{6EJ}\Bigg|_{x>3\ell/4} + \frac{R_B(x-3\ell/4)^3}{6EJ}.$$

Находим перемещение v_0 и угол поворота θ_{z0} сечения D из условий закрепления ($v = 0$ при $x = \ell/4$ и $x = 3\ell/4$)

$$v_0 = -\frac{P\ell^3}{64EJ} = -0{,}315 \text{ мм}, \quad \theta_{z0} = \frac{7P\ell^2}{96EJ} = 7{,}36\cdot 10^{-4} \text{ рад}.$$

Подставим заданную высоту падения h и абсолютную величину перемещения точки D в формулу для коэффициента динамичности ($\left|v_{ст}^D\right| = |v_0|$)

$$K_g = 1 + \sqrt{\frac{2\cdot 30}{0{,}315}} = 14{,}8.$$

Проверяем выполнение условия прочности при ударе

$$\sigma_{g,max} = 14{,}8\cdot 12{,}6 = 186 \text{ МПа} < [\sigma] = 200 \text{ МПа}$$

и вычисляем абсолютную величину динамического перемещения (направлено вниз) точки A:

$$\left|v_g^A\right| = K_g \left|v_{ст}^A\right|,$$

где статическое перемещение точки A, определяется по уравнению изогнутой оси при $x = \ell$

$$v_{ст}^A = -\frac{P\ell^3}{192EJ} = -0{,}105 \text{ мм}.$$

После подстановки

$$\left|v_g^A\right| = 14{,}8\cdot 0{,}105 = 1{,}56 \text{ мм}.$$

Для уменьшения динамического перемещения точки A правая неподвижная опора заменяется пружиной, жесткость которой обозначим C (рис.2.6,г). При статическом нагружении системы в этом случае реакции R_B и R_C, моменты $M_{ст}$ и напряжения $\sigma_{ст}$ не изменятся, а перемещения изменятся на величину, соответствующую повороту стержня относительно точки B как абсолютно жесткого тела ($EJ = \infty$) на угол $\theta_{AD} = |v_c|/0{,}5\ell$, где $v_c = R_c/C = 3P/2C$. Таким образом, $\theta_{AD} = 3P/C\ell$. Суммируя абсолютные перемещения в точках A и D, определяемые статическими нагрузками для стержня на неподвижных опорах (рис.2.6,б) абсолютно жесткого стержня на податливой опоре в точке C (рис.2.6,г), находим абсолютные статические перемещения для упругодеформируемого стержня на податливой опоре $\bar{v}$:

$$\left|\bar{v}_{ст}^A\right| = \left|v_{ст}^A\right| + \theta_{AD}\,3\ell/4 = \frac{P\ell^3}{64EJ} + \frac{9P}{4C};$$

$$\bar{v}_{ст}^{D} = v_{ст}^{D} - \theta_{AD}\,\ell/4 = \frac{P\ell^3}{64EJ} - \frac{3P}{4C}.$$

Коэффициент динамичности системы с податливой опорой и абсолютное перемещение точки A равны

$$K_g = 1 + \sqrt{2h/\left|\bar{v}_{ст}^{D}\right|}\,, \quad \left|\bar{v}_g^{A}\right| = K_g \cdot \left|\bar{v}_{ст}^{A}\right|.$$

После всех подстановок имеем

$$\left|\bar{v}_g^{A}\right| = \left(1 + \sqrt{\frac{2\cdot 30}{0{,}315 + \frac{9\cdot 10^3}{4c}}}\right)\left(0{,}105 - \frac{3\cdot 10^3}{4c}\right).$$

В табл.2.I указаны перемещения $\left|\bar{v}_g^{A}\right|$ для 4-х значений жесткости c .

Таблица 2.I

C , Н/мм	8750	7500	6250	5000
$\left\|\bar{v}_g^{A}\right\|$, мм	I,I35	I,072	0,988	0,867

После уточнений находим $\left|\bar{v}_g^{A}\right| = 1$ мм при C = 6400 Н/мм.

3. АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В ТОЧКЕ. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ В ОБЩИХ СЛУЧАЯХ НАГРУЖЕНИЯ

В предыдущих главах были разобраны задачи определения напряжений и расчетов на прочность при простых видах нагружения. При этом определялись наибольшие для всего стержня нормальные и касательные напряжения и обеспечивалось удовлетворение условиям прочности $\sigma_{max} \leq [\sigma]$, $\tau_{max} \leq [\tau]$. Однако в расчетах не учитывалось, действуют ли нормальные и касательные напряжения одновременно в одной точке или в разных точках стержня по отдельности.

Очевидно, что для оценки прочности в общем случае нагружения необходим анализ напряженного состояния в точке.

3.I. Общие положения теории напряженного состояния

В деформируемом теле при воздействии на него системы сил возникают напряжения. Их величины и направления определяются как объективными (например, внешними силами, геометрией стержня, системой его закрепления), так и субъективными факторами (положением точки и ориентацией сечения, проведенного через нее).

При расчете стержневой системы составляется расчетная схема, для ее элементов строятся эпюры внутренних силовых факторов, анализ которых позволяет выделить одну или несколько наиболее нагруженных зон, расположенных в окрестностях различных точек продольной оси стержня. В такой зоне, в первую очередь, проводится поперечное сечение, т.е. сечение, перпендикулярное продольной оси стержня. В самом сечении вычисляются нормальные и касательные напряжения и выделяются точки, где величины σ и τ достигают максимальных значений, либо наблюдается сочетание достаточно больших их величин. Для исследования напряженного состояния в окрестности точки мысленно вырезается бесконечно малый параллелепипед, лицевая грань которого совпадает с поперечным сечением, а боковые - *параллельны двум главным осям этого сечения*. На всех шести гранях параллелепипеда в общем случае могут действовать одновременно нормальные и касательные напряжения, как это показано на рис.3.I,а. Оценить напряженное состояние, представленное в таком виде, затруднительно. При изменении ориентации вырезаемого параллелепипеда на его гранях будут наблюдаться напряжения, отличающиеся от предыдущих не только величиной, но, возможно, и знаком.

В теории упругости доказано, что через любую точку можно провести три взаимно перпендикулярные площадки, ориентированные таким образом, что на них действуют только нормальные напряжения (рис.3.I,б). Такие площадки называются главными, соответственно напряжения - главными напряжениями. Самым важным свойством главных площадок является то, что главные напряжения являются экстремальными из всех нормальных напряжений, действующих в различных площадках, проведенных через ту же точку. Наибольшее в алгебраическом смысле главное напряжение обозначается σ_1 , наименьшее - σ_3 , промежуточное - σ_2 .

На рис.3.I,б показаны главные напряжения в предположении, что все они растягивающие, т.е. $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3 > 0$, хотя возможны случаи, когда часть из них либо все они отрицательны, т.е. *сжимающие*.

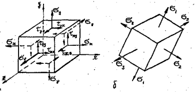

Рис.3.I. *Напряжения на гранях* элементарного параллелепипеда: а – с гранями из площадок общего положения; б – с гранями из главных площадок

При деформации параллелепипеда общего положения изменяются длины его ребер (действие нормальных напряжений), а также углы между ними (действие касательных напряжений). При упругом состоянии изотропного материала относительные удлинения по координатным осям и углы сдвига связаны с нормальными и касательными напряжениями зависимостями обобщенного закона Гука для изотропного тела:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)\right); & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_x)\right); & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G}\tau_{yz}; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \mu(\sigma_x + \sigma_y)\right); & \gamma_{zx} &= \frac{1}{G}\tau_{zx}, \end{aligned} \tag{3.I}$$

где E – модуль Юнга; G – модуль сдвига; μ – коэффициент Пуассона.

Под действием главных напряжений соответствующий элементарный параллелепипед деформируется без перекосов, оставаясь прямоугольным. Относительные удлинения по направлениям главных осей называются главными деформациями, обозначаются соответственно действующим по тем же направлениям главным *напряжениям и отвечают условиям* $\varepsilon_1 \geqslant \varepsilon_2 \geqslant \varepsilon_3$.

Обобщенный закон Гука в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E}\left(\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)\right); \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}\left(\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)\right); \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E}\left(\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)\right). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Напряженное состояние, при котором все три главные напряжения отличны от нуля, называется объемным, или трехосным. Если одно из главных напряжений равно нулю, напряженное состояние называется плоским, или двухосным. Если же отсутствуют два главных напряжения, то напряженное состояние называется линейным, или одноосным.

В большинстве случаев расчета стержневых систем известно положение хотя бы одной главной площадки. Более того, чаще всего соответствующее ей главное напряжение равно нулю.

Ниже будет показано, что для выполнения расчетов на прочность в сложном напряженном состоянии необходимо знать величины всех главных напряжений.

Допустим, в окрестности некоторой точки произвольно нагруженного стержня (рис.3.2) выделен элементарный параллелепипед с ориентацией его граней по координатным осям. Предположим, что ось z совпала со второй главной осью, следовательно, в перпендикулярной его площадке действует σ_2, а касательные напряжения отсутствуют. В частности, возможно, что $\sigma_2 = 0$. Не отвлекаясь далее на вторую главную площадку, вращением элемента вокруг оси z совместим остальные его грани с главными площадками. На плоской картинке (рис.3.3) полагаем векторы напряжений σ_x, σ_y, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ положительно направленными, а также $\alpha > 0$, если поворот оси x к главной оси происходит

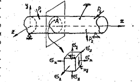

Рис.3.2. К исследованию напряженного состояния в окрестности точки А произвольно нагруженного стержня

по часовой стрелке. Главные напряжения вычисляются по формуле

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \qquad (3.3)$$

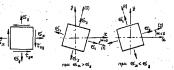

Рис.3.3. Поворот от площадок общего положения к главным площадкам

Если $\sigma_x > \sigma_y$, то поворот оси x происходит к первой главной оси, если $\sigma_x < \sigma_y$ - то к третьей. Угол поворота можно вычислить из формулы

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}. \qquad (3.4)$$

3.2. Понятия о расчетах на прочность при сложном напряженном состоянии

Механические характеристики материалов определяются при *испытаниях гладких образцов на одноосное растяжение и сжатие* до разрушения. Допускаемые напряжения назначаются с учетом коэффициента запаса из величины опасных для данного материала напряжений: $[\sigma] = \sigma_{on}/K$. В качестве σ_{on} принимают предел текучести $\sigma_т$ для пластичных материалов и предел *прочности $\sigma_{пч}$ для хрупких. Величины $\sigma_т$ и $\sigma_{пч}$* могут быть различными при растяжении и сжатии для одного и того же материала.

Для деталей, материал которых находится в одноосном на-

пряженном состоянии, расчет прочности не вызывает затруднений.

Для оценки опасности плоского или объемного напряженных состояний экспериментальный путь неприемлем из-за бесконечного числа соотношений между главными напряжениями, а также уникальности и высокой цены испытаний. Теоретический подход к данной проблеме позволил на основании тех или иных критериев выработать эквивалентные напряжения, являющиеся комбинациями действующих главных напряжений. Именно эти эквивалентные напряжения и сравниваются с опасными, полученными при простых одноосных испытаниях. Из всего многообразия теорий предельных состояний выделим пять наиболее известных. Эквивалентные напряжения по четырем (классическим) теориям принято индексировать римскими цифрами. Опуская описание критериев наступления опасного состояния, приведем соответствующие им условия прочности.

Для хрупких материалов:

$$\sigma_I = \sigma_1 \le [\sigma];$$

$$\sigma_{II} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \le [\sigma], \quad [\sigma] = \sigma_{пч}/K. \qquad (3.5)$$

Гипотезы, положенные в основу теорий, по которым получены формулы (3.5), имеют настолько серьезные недостатки, что их сейчас не используют.

Для пластичных материалов:

$$\sigma_{III} = \sigma_1 - \sigma_3 \le [\sigma]; \qquad (3.6)$$

$$\sigma_{IV} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \le [\sigma]. \qquad (3.7)$$

Здесь $[\sigma] = \sigma_т/K_т$; $\sigma_т = \sigma_т^р$ - предел текучести при растяжении; $K_т$ - коэффициент запаса.

Для материалов с одинаковыми пределами текучести на растяжение и сжатие эти теории дают неплохие результаты. Наибольшее расхождение в величинах $\sigma_{экв}$ по формулам (3.6) и (3.7) достигает 15,4% при чистом сдвиге.

По общепризнанной сегодня теории Мора

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - n\sigma_3 \le [\sigma]. \qquad (3.8)$$

Условие прочности (3.8) применимо для хрупких и пластичных материалов. Коэффициент n равен отношению опасного напряжения при растяжении к его величине при сжатии:

$$n = \frac{\sigma_т^р}{\sigma_т^с}; \qquad n = \frac{\sigma_{пч}^р}{\sigma_{пч}^с} \tag{3.9}$$

для пластичных и для хрупких материалов соответственно.

У хрупких материалов $n < 1$ всегда, а у пластичных $n \leq 1$, причем при $n = 1$ условия (3.8) и (3.6) совпадают.

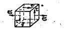

Рис.3.4. Частный случай плоского напряженного состояния

В практических расчетах часто приходится встречаться с частным видом плоского напряженного состояния, показанного на рис.3.4. Оно наблюдается при плоском поперечном изгибе, при совместном кручении и изгибе (или растяжении - сжатии). В этом случае по формуле (3.3) главные напряжения

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}. \tag{3.10}$$

Условия прочности (3.6)-(3.8) в этом случае приобретают вид

$$\sigma_{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]; \tag{3.11}$$

$$\sigma_{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]; \tag{3.12}$$

$$\sigma_{экв} = \frac{1-n}{2}\sigma + \frac{1+n}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]. \tag{3.13}$$

3.3. Примеры решения задач при сложном напряженном состоянии

В части II настоящих методических указаний в параграфе 2.3 разобраны три примера решения задач с использованием критериев прочности (3.6) и (3.7) в их модифицированном виде (3.11) и (3.12). Подстановка выражений нормальных напряжений от изгиба и касательных от кручения позволила выделить эквивалентный расчетный момент, имеющий вид (2.8) или (2.9).

Ниже приводятся в более полном объеме примеры расчетов прочности при сложном напряженном состоянии.

ПРИМЕР 3.1. Сравнить напряженные состояния, показанные на рис.3.5. Материал - высокопластичный.

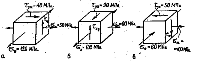

Рис.3.5. К примеру 3.1

Р е ш е н и е. У материалов, обладающих высокой пластичностью, значения предела текучести на растяжение и сжатие одинаковы. Используем III критерий, при котором эквивалентное напряжение $\sigma_{III} = \sigma_1 - \sigma_3$. В каждом из трех напряженных состояний имеется по одной площадке, в которой отсутствуют касательные напряжения, следовательно, она - главная, а нормальное напряжение в ней - главное напряжение. Два остальных в каждом случае подлежат определению. Пронумеровать их мы сумеем лишь после вычисления значений всех главных напряжений. Используем формулу (3.3), в которой заменим стандартную индексацию на условную:

а) $\sigma' = \frac{50+0}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(50-0)^2 + 4 \cdot 40^2} = 25 + 47{,}2 = 72{,}2$ МПа;

$\sigma'' = 25 - 47{,}2 = -22{,}2$ МПа;

$\sigma''' = 120$ МПа;

$\sigma_1 = 120$ МПа, $\sigma_2 = 72{,}2$ МПа, $\sigma_3 = -22{,}2$ МПа;

$\sigma_{III} = 120 - (-22{,}2) = 142{,}2$ МПа.

б) $\sigma' = 60$ МПа;

$$\sigma'' = \frac{0+100}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(0-100)^2 + 4\cdot 90^2} = 50 + 103 = 153 \text{ МПа};$$

$\sigma''' = 50 - 103 = -53$ МПа;

$\sigma_1 = 153$ МПа, $\sigma_2 = 60$ МПа, $\sigma_3 = -53$ МПа;

$\sigma_{III} = 153 - (-53) = 206$ МПа.

в) $\sigma' = -60$ МПа;

$$\sigma'' = \frac{100+0}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(100-0)^2 + 4\cdot 50^2} = 50 + 70{,}7 = 120{,}7 \text{ МПа};$$

$\sigma''' = 50 - 70{,}7 = -20{,}7$ МПа;

$\sigma_1 = 120{,}7$ МПа, $\sigma_2 = -20{,}7$ МПа, $\sigma_3 = -60$ МПа;

$\sigma_{III} = 120{,}7 - (-60) = 180{,}7$ МПа.

Из сравнения величин σ_{III}, следует, что напряженные состояния можно расположить в следующем порядке по степени убывания их нагруженности: б), в), а).

ПРИМЕР 3.2. Сравнить по III и IУ критериям опасность заданных напряженных состояний (рис.3.6).

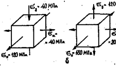

Рис.3.6. К примеру 3.2

Р е ш е н и е. На гранях заданных элементов в обоих случаях отсутствуют касательные напряжения, следовательно, все наблюдаемые площадки - главные. Главные напряжения:

а) $\sigma_1 = 120$ МПа; $\sigma_2 = 40$ МПа; $\sigma_3 = -40$ МПа;

б) $\sigma_1 = 180$ МПа; $\sigma_2 = 120$ МПа; $\sigma_3 = 20$ МПа.

Используя формулы (3.6) и (3.7), вычисляем эквивалентные напряжения:

а) $\sigma_{III} = 120 - (-40) = 160$ МПа;

$$\sigma_{IV} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(120-40)^2 + (40-(-40))^2 + (-40-120)^2} = 138{,}6 \text{ МПа}.$$

б) $\sigma_{III} = 180 - 20 = 160$ МПа;

$$\sigma_{IV} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(180-120)^2 + (120-20)^2 + (20-180)^2} = 140 \text{ МПа}.$$

Итак, по III критерию состояния материала равноопасны, а по IУ критерию опаснее второе.

ПРИМЕР 3.3. Определить, какое из заданных на рис.3.7 напряженных состояний опаснее. В обоих случаях материалы имеют ограниченную пластичность. Пределы текучести:

в 1-м случае - $\sigma_т^р = 240$ МПа, $\sigma_т^с = 800$ МПа;

во 2-м случае - $\sigma_т^р = 420$ МПа; $\sigma_т^с = 900$ МПа.

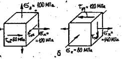

Рис.3.7. К примеру 3.3

Р е ш е н и е. Определяем главные напряжения:

а) $\sigma' = 100$ МПа;

$$\sigma'' = \frac{120}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{120^2 + 4\cdot 60^2} = 60 + 84{,}9 = 144{,}9 \text{ МПа};$$

$\sigma''' = 60 - 84{,}9 = -24{,}9$ МПа;

$\sigma_1 = 144{,}9$ МПа; $\sigma_2 = 100$ МПа; $\sigma_3 = -24{,}9$ МПа.

б) $\sigma' = -80$ МПа;

$$\sigma'' = \frac{140}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{140^2 + 4\cdot 120^2} = 70 + 138{,}9 = 208{,}9 \text{ МПа}.$$

$\sigma''' = 70 - 138{,}9 = -68{,}9$ МПа;

$\sigma_1 = 208{,}9$ МПа, $\sigma_2 = -68{,}9$ МПа, $\sigma_3 = -80$ МПа.

Коэффициент n в формуле (3.8) и эквивалентные напряжения по критерию Мора, наиболее подходящему в наших случаях напряженного состояния:

а) $n = 240/800 = 0{,}3$, $\sigma_{экв} = 144{,}9 - 0{,}3\,(-24{,}9) = 152{,}4$ МПа,

имеющийся запас прочности $K = \sigma_т^р / \sigma_{экв} = 240/152{,}4 = 1{,}57$;

б) $n = 420/900 = 0{,}467$, $\sigma_{экв} = 208{,}9 - 0{,}467\,(-80) =$
$= 246{,}2$ МПа,
$K = 420/246{,}2 = 1{,}71$.

Итак, запас прочности во 2-м случае выше.

ПРИМЕР 3.4. На латунный прямоугольный брусок, вставленный без зазоров и натяга в паз жесткого массива, действует давление, распределенное по торцам и верхней поверхности (рис.3.8,а). Определить, при каком значении параметра q в материале бруска начнутся пластические деформации. Задано: $\sigma_т = 170$ МПа; $E = 1\cdot 10^5$ МПа, $\mu = 0{,}34$.
Трением между бруском и стенками паза пренебречь.

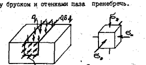

Рис.3.8. К примеру 3.4

Р е ш е н и е. На торцах и верхней грани отсутствуют нагрузки, вызывающие касательные напряжения. Полагая напряженное состояние бруска однородным, приходим к заключению, что все грани любого элементарного параллелепипеда, параллельные граням бруска, являются главными площадками (рис.3.8,б). При этом два главных напряжения известны: $\sigma' = \sigma_y = -q$; $\sigma'' = \sigma_z = -0{,}6q$, а третье $\sigma''' = \sigma_x$ подлежит определению. Поскольку массив жесткий, поперечный размер бруска измениться не может, т.е. $\varepsilon_x = 0$. Используем выражение закона Гука (3.1):

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \mu\,(\sigma_y + \sigma_z)\right).$$

Приравняв нулю правую часть, сокращаем так и не пригодившийся нам модуль Юнга. В итоге

$$\sigma_x = \mu(\sigma_y + \sigma_z) = 0{,}34(-q - 0{,}6q) = -0{,}544q.$$

Итак, главные напряжения $\sigma_1 = -0{,}544q$; $\sigma_2 = -0{,}6q$; $\sigma_3 = -q$. По III критерию эквивалентное напряжение $\sigma_{III} = 0{,}456q$. Обратим внимание на то, что эквивалентные напряжения по любой гипотезе не могут быть отрицательными.

Переход материала бруска из упругого в пластическое состояние произойдет при достижении величиной σ_{III} значения предела текучести $\sigma_т$, т.е. при $\sigma_{III} = \sigma_т$. Отсюда

$$q = \sigma_т/0{,}456 = 170/0{,}456 = 372{,}8 \text{ МПа}.$$

ПРИМЕР 3.5. Определить положение главных площадок и главные напряжения в случае плоского чистого сдвига (рис.3.9,а). *Считая известным значение предела текучести* $\sigma_т$ *при растяжении или сжатии, найти предел текучести* $\tau_т$. Сравнить результаты, полученные по III и IV критериям.

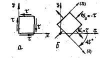

Рис.3.9. К примеру 3.5

Р е ш е н и е. В нашем случае $\sigma_x = \sigma_y = 0$; $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau$. По формуле (3.3) главные напряжения

$$\sigma_{1,3} = \frac{0+0}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(0-0)^2 + 4\tau^2} = \pm\tau.$$

Таким образом: $\sigma_1 = \tau$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\tau$.
По формуле (3.4)

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2\tau}{0} = \infty \text{ , т.е. } 2\alpha = 90^\circ,\ \alpha = 45^\circ.$$

Изображение главного элемента в тех же осях представлено на рис.3.9,б. По формулам (3.6) и (3.7)

$$\sigma_{III} = \tau - (-\tau) = 2\tau;$$

$$\sigma_{IV} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\tau^2 + \tau^2 + 4\tau^2} = \tau\sqrt{3}.$$

Приравняв эквивалентные напряжения $\sigma_т$, получаем
по III критерию: $2\tau_т = \sigma_т$, $\tau_т = 0{,}5\,\sigma_т$;
по IV критерию: $\tau_т\sqrt{3} = \sigma_т$; $\tau_т = 0{,}577\,\sigma_т$.
Сравниваем полученные величины:

$$\frac{0{,}577\,\sigma_т - 0{,}5\,\sigma_т}{0{,}5\,\sigma_т} \cdot 100\,\% = 15{,}4\,\%.$$

ПРИМЕР 3.6. Для заданной на рис.3.10,а балки из стали с допускаемым напряжением $[\sigma]$ = 200 МПа:

I) подобрать из условия прочности двутавровое сечение;

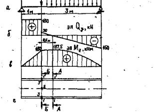

Рис.3.10. К примеру 3.6

2) произвести стандартную проверку прочности по σ_{max} и τ_{max};

3) выделить сечение с неблагоприятным сочетанием внутренних силовых факторов, произвести полную проверку прочности по опасной точке в нем.

Решение. Для определения расчетных (наибольших) значений изгибающего момента M_{max} и поперечной силы Q_{max} необходимо, в первую очередь, определить реакции опор и построить эпюры M_z и Q_y . Решение таких задач рассмотрено в части I настоящих методических указаний в главах 2 и 3. Поэтому здесь опускаем соответствующие расчеты. Эпюры M_z и Q_y показаны на рис.3.10,б, в.

I) Из эпюр видно, что M_{max} = 187,5 кН·м; Q_{max} = 180 кН.

При подборе сечения достаточно длинных балок основным является условие прочности по нормальным напряжениям:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_z} \leq [\sigma], \quad \text{откуда } W_z \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]};$$

$$W_z \geq \frac{187{,}5 \cdot 10^3 \text{ Нм}}{200 \cdot 10^{-6} \text{ Н/м}^2} = 937{,}5 \cdot 10^{-6}\text{м}^3 = 937{,}5 \text{ см}^3.$$

Из таблицы сортамента ГОСТ 8239-56 подбираем двутавр № 40 с характеристиками: h = 40 см; b = 15,5 см; d = 0,8 см; t = 1,3 см; J_z = 18930 см^4; W_z = 947 см^3; S_z^* = 540 см^3.

2) Максимальные напряжения в этом двутавре:

$$\sigma_{max} = \frac{187{,}5 \cdot 10^3}{947 \cdot 10^{-6}} = 198 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 198 \text{ МПа} < [\sigma] = 200 \text{ МПа};$$

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max} \cdot S_z^*}{J_z \cdot d} = \frac{180 \cdot 10^3 \cdot 540 \cdot 10^{-6}}{18930 \cdot 10^{-8} \cdot 0{,}8 \cdot 10^{-2}} = 64{,}2 \cdot 10^6 \text{ Па} =$$

$$= 64{,}2 \text{ МПа} < [\tau] \approx 0{,}58\,[\sigma] = 116 \text{ МПа}.$$

Условия прочности выполняются.

3) Из эпюр видно, что M_{max} действует в сечении А-А, где $Q_y = 0$, а Q_{max} – в любом сечении от левой опоры до сечения Б-Б (рис.3.10,г), *но там изгибающий момент меньше* максимального.

Рассмотрим сечение Б-Б, в котором M_z = 180 кН·м – достаточно велик, а $Q_y = Q_{max}$ = 180 кН. Подсчитаем напряжения в пяти точках по высоте сечения, используя формулы

$$\sigma_{(i)} = -\frac{M_z}{J_z} y_i \; ; \quad \tau_{(i)} = \frac{Q_y \, S_z^{отс}}{J_z \, d} .$$

Точка I': $y_{1'} = 20$ см;

$$\sigma_{(1')} = -\frac{180 \cdot 10^3}{18930 \cdot 10^{-8}} \cdot 20 \cdot 10^{-2} = -190{,}2 \text{ МПа};$$

$$\tau_{(1')} = 0.$$

Точка I: $y_1 = -20$ см;

$$\sigma_{(1)} = -\sigma_{(1')} = 190{,}2 \text{ МПа}; \quad \tau_{(1)} = 0.$$

Точка 2: $y_2 = 0$;

$$\sigma_{(2)} = 0; \quad \tau_{(2)} = \tau_{max} = 64{,}2 \text{ МПа}.$$

Точка 3': $y_{3'} = \frac{h}{2} - t = 20 - 1{,}3 = 18{,}7$ см;

$$S_z^{отс} = bt\,\frac{h-t}{2} = 15{,}5 \cdot 1{,}3 \cdot 0{,}5(40-1{,}3) = 390 \text{ см}^3;$$

$$\sigma_{(3')} = -\frac{180 \cdot 10^3}{18930 \cdot 10^{-6}} \cdot 18{,}7 \cdot 10^{-2} = -181 \text{ МПа};$$

$$\tau_{(3')} = \frac{180 \cdot 10^3 \cdot 390 \cdot 10^{-6}}{18930 \cdot 10^{-8} \cdot 0{,}8 \cdot 10^{-2}} = 46{,}4 \text{ МПа}.$$

Точка 3: $y_3 = -18{,}7$ см

$$\sigma_{(3)} = -\sigma_{(3')} = 181 \text{ МПа}; \quad \tau_{(3)} = \tau_{(3')} = 46{,}4 \text{ МПа}.$$

На рис.3.II показаны эпюры σ и τ в сечении Б–Б, а также (для сравнения) в сечении А–А. В последнем касательные напряжения по всей высоте равны нулю.

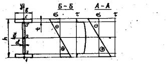

Рис.3.II. К примеру 3.6. Эпюры нормальных и касательных напряжений

Проанализируем напряженные состояния в окрестностях этих точек. Во всех случаях в площадках, параллельных боковой поверхности двутавра (перпендикулярных оси z), напряжения отсутствуют.

В точках I' и I наблюдается одноосное напряженное состояние (рис.3.I2,а). В точке 2 – чистый сдвиг (рис.3.I2,б).

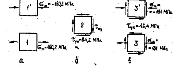

Рис.3.I2. К примеру 3.6. Виды напряженных состояний в точках сечения

В точках 3' и 3 – плоское напряженное состояние (рис.3.I2,в).

В первых точках выполнение условия прочности очевидно.

В примере 3.5 для чистого сдвига получены формулы эквивалентных напряжений, по которым

$$\sigma_{III} = 2\tau = 2 \cdot 64{,}2 = 128{,}4 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{IV} = \tau\sqrt{3} = 64{,}2 \cdot 3 = 111{,}2 \text{ МПа}.$$

Итак, в точке 2 условие прочности выполняется.

Для вычисления эквивалентных напряжений в точках 3 и 3' (в стенке двутавра под полками) используем формулы (3.II) и (3.I2):

$$\sigma_{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{181^2 + 4 \cdot 46{,}4^2} = 203{,}4 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{181^2 + 3 \cdot 46{,}4^2} = 198{,}1 \text{ МПа}.$$

Итак, в этих точках по III критерию условие прочности не выполняется. Перегрузка составляет I,7%.

Следует отметить, что в практике инженерных расчетов допускается перегрузка в отдельных точках конструкции, но она не должна превышать 5% от $[\sigma]$. Это применимо для конструкций, работающих при стационарной нагрузке. При повторно переменных нагрузках местное перенапряжение может привести к появлению усталостной трещины.

ПРИМЕР 3.7. Проверить прочность (по III критерию) круглых стержней кулачков, показанных на рис.3.13. Известны диаметры: d_1 = 55 мм; d_2 = 70 мм; d_3 = 60 мм. Материал - сталь с $[\sigma]$ = 80 МПа.

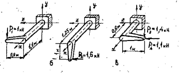

Рис.3.13. К примеру 3.7

Р е ш е н и е. В поперечных сечениях круглых стержней действуют следующие внутренние силовые факторы: изгибающий момент M_z (или M_y), крутящий момент M_x, поперечная сила Q_y. Разобранными в части I методических указаний способами строим эпюры M_z, M_x и Q_y для всех трех вариантов кулачков (рис.3.14). Из них видно, что опасными являются сечения у заделки. В окрестностях точек пересечения поперечных осей этих сечений с поверхностью стержней выделим элементарные параллелепипеды и на их гранях покажем действующие напряжения (рис.3.15). Направление касательных напряжений соответствует действию крутящих моментов. В сечении третьего стержня одновременно действуют изгибающие моменты в вертикальной и горизонтальной плоскостях. Равнодействующий изгибающий момент

$$M_u = \sqrt{M_z^2 + M_y^2} = \sqrt{0{,}84^2 + 0{,}66^2} = 1{,}07 \text{ кН·м}.$$

Он действует в плоскости, угол наклона которой к оси z может быть найден через его тангенс:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{M_z}{M_y} = \frac{0{,}84}{0{,}66} = 1{,}273; \quad \alpha = 51°50'.$$

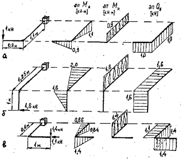

Рис.3.14. К примеру 3.7. Эпюры внутренних силовых факторов

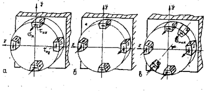

Рис.3.15. К примеру 3.7. Напряжения в характерных точках опасных сечений

В этой плоскости выделяем два дополнительных элемента (рис.3.15,в).

Вычислим максимальные напряжения в исследуемых точках (без учета действия поперечной силы):

а) $$\sigma_{max} = \frac{M_z}{W_z} = \frac{M_z}{\pi d^3/32} = \frac{1{,}1\cdot 10^3\cdot 32}{\pi\cdot 55^3\cdot 10^{-9}} = 67{,}4\ \text{МПа};$$

$$\tau_{max} = \frac{M_x}{W_\rho} = \frac{M_x}{\pi d^3/16} = \frac{0{,}9\cdot 10^3\cdot 16}{\pi\cdot 55^3\cdot 10^{-9}} = 27{,}6\ \text{МПа}.$$

б) $$\sigma_{max} = \frac{2{,}0\cdot 10^3\cdot 32}{\pi\cdot 70^3\cdot 10^{-9}} = 59{,}4\ \text{МПа};$$

$$\tau_{max} = \frac{1{,}6\cdot 10^3\cdot 16}{\pi\cdot 70^3\cdot 10^{-9}} = 23{,}8\ \text{МПа}.$$

в) $$\sigma_{max} = \frac{1{,}07\cdot 10^3\cdot 32}{\pi\cdot 60^3\cdot 10^{-9}} = 50{,}5\ \text{МПа};$$

$$\tau_{max} = \frac{1{,}4\cdot 10^3\cdot 16}{\pi\cdot 60^3\cdot 10^{-9}} = 33{,}0\ \text{МПа}.$$

Направления этих напряжений и площадки, в которых они действуют, показаны на рис.3.15. Отметим, что в третьем стержне σ_{max} действуют в точках 5 и 6, в то время, как в точках I и 3, 2 и 4 нормальные напряжения вызваны действием M_z и M_y по отдельности.

Вычислим касательные напряжения от поперечной силы. Для круглого стержня формула Журавского имеет частный вид:

$$\tau'_{max} = \frac{4}{3}\,\frac{Q}{F}\ ,$$

где $F = \frac{\pi d^2}{4}$ – площадь сечения.

Итак, для стержней:

а) $$\tau'_{max} = \frac{4}{3}\,\frac{1{,}0\cdot 10^3\cdot 4}{\pi\cdot 55^2\cdot 10^{-6}} = 0{,}56\ \text{МПа},$$

здесь τ'_{max} действует в точках 2 и 4 и направлено вниз. При его учете найденное значение в точке 2 вычитается из τ_{max} от кручения, а в точке 4 – прибавляется;

б) $$\tau'_{max} = \frac{4}{3}\,\frac{1{,}6\cdot 10^3\cdot 4}{\pi\cdot 70^2\cdot 10^{-6}} = 0{,}55\ \text{МПа}.$$

Это напряжение действует в точках I и 3, направлено справа налево, поэтому в точке I вычитается, а в точке 3 прибавляется к τ_{max} от кручения.

Видно, что найденные напряжения τ'_{max} от действия поперечной силы значительно меньше τ_{max} от кручения. Более того, они отсутствуют в площадках, где наблюдаются нормальные напряжения от изгиба.

Выбираем в качестве опасных по одной точке в каждом случае и по формуле (3.11) производим проверку прочности:

а) точка I (или 3):

$$\sigma_{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{67{,}4^2 + 4\cdot 27{,}6^2} = 87{,}1\ \text{МПа} > [\sigma].$$

Перегрузка – 8,9%.

б) точка 2 (или 4):

$$\sigma_{III} = \sqrt{59{,}4^2 + 4\cdot 23{,}8^2} = 76{,}1\ \text{МПа} < [\sigma].$$

Недогрузка – 4,9%.

в) точка 5 (или 6):

$$\sigma_{III} = \sqrt{50{,}5^2 + 4\cdot 33^2} = 83{,}1\ \text{МПа} > [\sigma].$$

Перегрузка – 3,9%.

Итак, прочность второго стержня обеспечена, первого – не удовлетворительна. В третьем стержне перегрузка не превысила 5%, но здесь рассматривался элемент кулачкового механизма, *работающего в режиме повторно переменных нагрузок*. В этом случае перегрузка недопустима.

ПРИМЕР 3.8. Определить необходимую толщину стенки тонкостенной трубы с заглушенным торцем и жестко защемленной на другом конце (рис.3.16). Кроме сосредоточенных сил P_1 и P_2 труба нагружена внутренним давлением q.

Задано: P_1 = 40 кН; P_2 = 60 кН; q = 2 МПа; ℓ = 3 м; a = 2 м; R = 0,4 м; материал – сталь с $\sigma_т$ = 280 МПа; коэффициент запаса по прочности $K_т$ = 2.

Указание. Толщину стенки рассчитать из условия прочности, основанного на IV критерии. Провести анализ напряженного состояния в четырех характерных точках (*указаны на рисунке*) опасного сечения.

Решение. Основные сведения из теории и порядок выполнения работ даны в методических указаниях В.В.Даниловской "Анализ напряженного состояния и определение толщины стенки тонкостенной цилиндрической трубы при сложной деформации". Изд.ЛКИ, 1975.

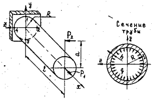

Рис.3.16. К примеру 3.8

Для тонкого кольцевого сечения толщиной h и средним радиусом R геометрические характеристики могут быть вычислены по формулам:

- площадь поперечного сечения $F = 2\pi R h$;
- осевой момент инерции (при изгибе) $J_u = \pi R^3 h$;
- момент сопротивления изгибу $W_u = \pi R^2 h$;
- полярный момент инерции $J_p = 2\pi R^3 h$;
- момент сопротивления кручению $W_p = 2\pi R^2 h$;
- статический момент площади полусечения относительно центральной оси $S^* = 2R^2 h$.

Рассмотрим действие факторов внешней нагрузки по отдельности.

Внутреннее давление, воздействуя на торцевую заглушку, вызывает растяжение трубы вдоль ее оси x, а давление на стенки приводит к расширению кольца сечения, т.е. к растяжению в окружном направлении. В обоих случаях возникают только нормальные напряжения:

- в поперечных сечениях (перпендикулярных оси x)

$$\sigma_{xq} = \frac{qR}{2h};$$

- в продольных радиальных сечениях

$$\sigma_{\theta q} = \frac{qR}{h}.$$

Пренебрегая влиянием торцев, можем полагать, что внутреннее давление вызывает в любой точке стенки трубы одинаковое плоское напряженное состояние. На рис.3.17 показан элементарный параллелепипед, вырезанный у произвольной точки стенки поперечными и продольно-радиальными площадками.

Сосредоточенная сила P_1 вызывает осевое растяжение трубы, а сила P_2 – кручение и поперечный изгиб в горизонтальной плоскости.

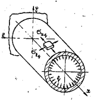

Рис.3.17. К примеру 3.8. Воздействие внутреннего давления

На рис.3.18 результаты воздействия на трубу сил P_1 и P_2 показаны в виде эпюр продольной силы N_x, крутящего момента M_x, изгибающего момента M_y и поперечной силы Q_z. При построении эпюр сила P_2 заменяется равной ей силой P_2', приложенной к центру торца и направленной по оси z, а также моментом $\mathcal{M} = P_2 a$, действующим в плоскости, перпендикуляр-

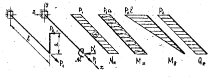

Рис.3.18. К примеру 3.8. Эпюры внутренних силовых факторов

ной оси x. Видно, что опасным является сечение у заделки, где изгибающий момент достигает максимума. В этом сечении возьмем четыре точки на пересечении координатных осей с внешней поверхностью трубы. В окрестностях этих точек выделяем элементарные параллелепипеды, ориентированные по осям трубы, и определяем величины и направления нормальных и касательных напряжений, действующих в площадках элементов.

На гранях элементов (рис.3.19-3.22) изначально изображены нормальные напряжения растягивающими, а касательные - по направлению действия крутящего момента. Если какой-либо фактор вызовет напряжение противоположного направления, то учтем это отрицательным знаком при соответствующем слагаемом.

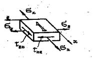

Рис.3.19. К примеру 3.8

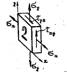

Рис.3.20. К примеру 3.8

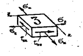

Рис.3.21. К примеру 3.8

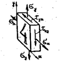

Рис.3.22. К примеру 3.8

Точка 1 (см.рис.3.19). Площадка, перпендикулярная оси y, совпадает с внешней поверхностью, напряжения в ней отсутствуют. Напряжение σ_z определяется только действием давления q :

$$\sigma_z = \sigma_{\theta q} = \frac{qR}{h} .$$

Напряжение σ_x определяется действием давления q и продольной силы N_x :

$$\sigma_x = \sigma_{xq} + \sigma_{xN} = \frac{qR}{2h} + \frac{P_1}{2\pi Rh} .$$

Напряжение τ_{xz} определяется действием M_x и Q_y причем в обоих случаях направление его совпадает с показанным на рис.3.19:

$$\tau_{xz} = \frac{M_x}{W_p} + \frac{Q_z S_y^*}{J_y 2h} = \frac{P_2 a}{2\pi R^2 h} + \frac{P_2 2R^2 h}{\pi R^3 h\, 2h} = \frac{P_2 a}{2\pi R^2 h} + \frac{P_2}{\pi R h} .$$

По закону парности касательных напряжений $\tau_{zx} = \tau_{xz}$.

Точка 2 (см.рис.3.20). Здесь и в дальнейшем при записи выражений для напряжений будем учитывать с соответствующим знаком только те силовые факторы, что дают отличные от нуля слагаемые:

$$\sigma_x = \frac{qR}{2h} + \frac{N_x}{F} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{qR}{2h} + \frac{P_1}{2\pi Rh} + \frac{P_2 \ell}{\pi R^2 h} ;$$

$$\sigma_y = \frac{qR}{h} ;$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{M_x}{W_p} = \frac{P_2 a}{2\pi R^2 h} .$$

Точка 3 (см.рис.3.21):

$$\sigma_x = \frac{qR}{2h} + \frac{N_x}{F} = \frac{qR}{2h} + \frac{P_1}{2\pi Rh} ;$$

$$\sigma_z = \frac{qR}{h} ;$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{M_x}{W_p} - \frac{Q_z S_y^*}{J_y\, 2h} = \frac{P_2 a}{2\pi R^2 h} - \frac{P_2}{\pi R h} .$$

Точка 4 (см.рис.3.22):

$$\sigma_x = \frac{qR}{2h} + \frac{N_x}{F} - \frac{M_y}{W_y} = \frac{qR}{2h} + \frac{P_1}{2\pi Rh} - \frac{P_2 \ell}{\pi R^2 h} ;$$

$$\sigma_y = \frac{qR}{h} ;$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{M_x}{W_p} = \frac{P_2 a}{2\pi R^2 h} .$$

Теперь подставим в полученные формулы заданные значения длин в метрах, сил в ньютонах, давления в паскалях (Н/м^2).

Точка I:

$$\sigma_x = \frac{2\cdot 10^6 0{,}4}{2h} + \frac{40\cdot 10^3}{2\pi\, 0{,}4h} = \frac{400\cdot 10^3}{h} + \frac{16\cdot 10^3}{h} = \frac{416}{h}\cdot 10^3;$$

$$\sigma_z = \frac{2\cdot 10^6\cdot 0{,}4}{h} = \frac{800}{h}\cdot 10^3;$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{60\cdot 10^3\cdot 2}{2\pi\, 0{,}4^2 h} + \frac{60\cdot 10^3}{\pi\cdot 0{,}4h} = \frac{119\cdot 10^3}{h} + \frac{48\cdot 10^3}{h} = \frac{167}{h}\cdot 10^3.$$

Точка 2 (используем сделанные выше вычисления):

$$\sigma_x = \frac{400\cdot 10^3}{h} + \frac{16\cdot 10^3}{h} + \frac{60\cdot 10^3\cdot 3}{\pi\, 0{,}4^2 h} = \frac{416\cdot 10^3}{h} + \frac{358\cdot 10^3}{h} = \frac{774}{h}\cdot 10^3$$

$$\sigma_y = \frac{800}{h}\cdot 10^3;$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{119}{h}\cdot 10^3.$$

Точка 3:

$$\sigma_x = \frac{416}{h}\cdot 10^3; \qquad \sigma_z = \frac{800}{h}\cdot 10^3;$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{119\cdot 10^3}{h} - \frac{48\cdot 10^3}{h} = \frac{71}{h}\cdot 10^3.$$

Точка 4:

$$\sigma_x = \frac{416\cdot 10^3}{h} - \frac{358\cdot 10^3}{h} = \frac{58}{h}\cdot 10^3;$$

$$\sigma_y = \frac{800}{h}\cdot 10^3; \ \tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{119}{h}\cdot 10^3.$$

Вычисляем главные напряжения для случая плоского напряженного состояния по формуле (3.3). По формуле (3.4) определяем угол между осью x и 2-й главной осью. Учтем, что во всех точках $\sigma_x < \sigma_8$.

Точка I:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2} = \frac{10^3}{h}(608+254) = \frac{862}{h}\cdot 10^3;$$

$$\sigma_2 = \frac{10^3}{h}(608-254) = \frac{354}{h}\cdot 10^3;$$

$$\sigma_3 = 0; \quad \alpha = 20^\circ 29'.$$

Точка 2:

$$\sigma_1 = \frac{10^3}{h}(787+120) = \frac{907}{h}\cdot 10^3;$$

$$\sigma_2 = \frac{10^3}{h}(787-120) = \frac{667}{h}\cdot 10^3;$$

$$\sigma_3 = 0; \quad \alpha = 41^\circ 54'.$$

Точка 3:

$$\sigma_1 = \frac{10^3}{h}(608+205) = \frac{813}{h}\cdot 10^3;$$

$$\sigma_2 = \frac{10^3}{h}(608-205) = \frac{403}{h}\cdot 10^3;$$

$$\sigma_3 = 0; \quad \alpha = 10^\circ 7'.$$

Точка 4:

$$\sigma_1 = \frac{10^3}{h}(429+390) = \frac{819}{h}\cdot 10^3;$$

$$\sigma_2 = \frac{10^3}{h}(429-390) = \frac{39}{h}\cdot 10^3;$$

$$\sigma_3 = 0; \quad \alpha = 8^\circ 53'.$$

По формуле (3.7) подсчитаем значения эквивалентных напряжений

Точка I: $\sigma_{IV} = \frac{750}{h}\cdot 10^3.$

Точка 2: $\sigma_{IV} = \frac{813}{h}\cdot 10^3.$

Точка 3: $\sigma_{IV} = \frac{704}{h}\cdot 10^3.$

Точка 4: $\sigma_{IV} = \frac{800}{h}\cdot 10^3.$

Спасной является точка 2. По условию прочности $\sigma_{IV} < [\sigma]$, где $[\sigma] = \sigma_т / к_т = 280/2 = 140$ МПа. Изменяем размерность: $[\sigma] = 140\cdot 10^6$ Па.

Итак:

$$\frac{813}{h}\cdot 10^3 \leqslant 140\cdot 10^6.$$

Отсюда

$$h \geqslant \frac{813\cdot 10^3}{140\cdot 10^6} = 5{,}8\cdot 10^{-3}\,м = 5{,}8\,мм.$$

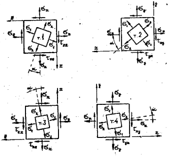

Рис.3.23. К примеру 3.8. Главные площадки

Принимаем толщину стенки трубы $h = 6$ мм. Подставляя это значение во все полученные выше выражения нормальных, касательных и главных напряжений, представим их значения в табл.3.I.

Таблица 3.I

Номер точки	Напряжения, МПа				Главные напряжения, МПа			α, град.	σ_{IV}, МПа
	Поперечное сечение		Продольно-радиальное сечение						
	σ_x	$\tau_{x\theta}$	σ_θ	$\tau_{\theta x}$	σ_1	σ_2	σ_3		
I	69,3	27,8	I33,3	27,8	I43,7	59,0	0	20°29'	I25,0
2	I29,0	I9,8	I33,3	I9,8	I5I,2	III,2	0	4I°54'	I35,5
3	69,3	II,8	I33,3	II,8	I35,5	67,2	0	I0°7'	II7,3
4	9,7	I9,8	I33,3	I9,8	I36,5	6,5	0	8°53'	I33,3

Обратим внимание, что в точках I и 2 $\sigma_1 > [\sigma]$, однако сочетание напряжений таково, что прочность в этих точках обеспечена.

На рис.3.23 показано положение главных площадок по отношению к координатным. Элементы показаны со стороны внешней поверхности трубы.

ОГЛАВЛЕНИЕ