

М. Н. РЕЙНОВ

Математическая модель судовой поверхности

490736-27

Фундаментальный

Учен. зап. кн.-б. ин-та
ВАС ШКОЛОВА

Лен. филиал. приемная,
мостовая



ИЗДАТЕЛЬСТВО
„СУДОСТРОЕНИЕ“
ЛЕНИНГРАД 1977

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ СЕРБИ:

А. Г. ДАНИЛОВСКИЙ,
А. В. ВЛИЧКО,
В. М. ПАШИН (ответственный редактор),
А. Н. ПИНСКИЕ,
А. П. ПРОСКУРИНОВ,
Б. Н. СЕРПОВ,
В. Е. СОЛДАТОВ.

Брошюра посвящена одному из разделов автоматизации проектирования судов — представлению судовой поверхности в виде, удобном для решения на ЭВМ многоцелевых задач. В ней изложены метод создания математической модели судовой поверхности, который включает способ формирования картовой сетки из линий, лежащих на поверхности, и способ интерполяции по этой сетке для получения ординаты произвольной точки. Рассмотрены вопросы применения математической модели судовой поверхности в колдыванках, при проектировании и постройке судов. Брошюра предназначена для инженеров-судостроителей и инженеров-математиков, занимающихся вопросами автоматизации проектирования.

Научный редактор канд. техн. наук Ю. Э. Резванко

Издана Наркоматом Речного

Математическая
модель
судовой
поверхности

Редактор Н. П. Савкина. Художественный редактор В. А. Пурицкий.
Технический редактор Р. К. Чаплина. Корректор А. В. Осипова.
Оформление художника Б. Н. Осипюкова

№ 5 № 161

Сдано в набор 20/X 1974 г. Подписано в печать 18/У 1974 г. № 19740.
Формат издания 88 × 96 мм. Бумага типографская № 2.
Угол сеч. л. 2/0. Уг.-маш. л. 1/40. Тираж 1500 экз. Издательский № 2226-14.
Цены 28 коп., перл 13 коп.

Издательство «Судостроение», 110005, Ленинград, ул. Говкина, 4.
Ленинградский типограф № 8 Союзполиграфиздат при Государственном издательстве
Союза Министров СССР по делам печати, распределения и рекламы заказов
110004, Ленинград, Мясницкая стр., 91

Методы линейного
программирования
в задаче согласования
обводов корпуса судна

Термин «математическая модель судовой поверхности» появился в связи с тем, что при использовании ЭВМ для решения вопросов проектирования и постройки судна возникает необходимость создания в памяти машины числового отбраковки поверхности суднового корпуса. Математическая модель судовой поверхности позволяет проектировщику и технологу решать с помощью ЭВМ разнообразные задачи от проектирования самой поверхности корпуса до составления управляющих программ обработки металлических конструкций суднового корпуса на станках с программным управлением.

Точность математической модели, заменяющей судовую поверхность, существенно зависит от этапа создания судна. Действительно, для выполнения проектировочных расчетов достаточно иметь таблицу ординат теоретического чертежа с точностью координат в пределах $\pm 0,01$ м. Если же речь идет о форме деталей обшивки корпуса, то нужно, очевидно, усилить точность математической модели судовой поверхности, во крайней мере, до $\pm 0,001$ м. Однако вряд ли целесообразно иметь разные модели судовой поверхности для проектировщика и технолога, так как принципиально более точная модель, конечно, найдет себе применение и там, где подобная точность, может быть, и не нужна. Вышло уместно, в какой момент формируется модель. Если это делается на ранних стадиях проектирования, то имеет смысл сохранить модель судовой поверхности вплоть до стадии технологической подготовки производства. Если же теоретический чертеж судна уже создан, то задача упрощается и сводится к так называемой задаче согласования обводов.

Методом аналитического представления судовой поверхности, а также методом согласования теоретического чертежа покрывающего много труда, обзор которых дан в работе [1]. Не останавливаясь на их сравнительной оценке, в настоящей работе рассмотрим метод [2] в том виде, в каком он доведен до практической реализации на ЭВМ.

Отличительной особенностью сеточного метода представления судовой поверхности является то, что сначала создается математическая модель так называемой карнасовой сетки — сетки пересекающихся между собой кривых, лежащих на судовой поверхности, а затем с помощью оригинального способа интерполяции вычисляются ординаты любых точек, принадлежащих этой поверхности.

При аппроксимации карнасовой сетки исходит из того, что судовой поверхности задана значительная некоторая точка на ней, причем эти значения обычно связываются с черточка, выпуклостного а масштаба, и следовательно, они имеют определенную погрешность. Поэтому создание математической модели карнасовой сетки обязательно сопровождается «сглаживанием» и «согласованием» кривых сетки.

Под сглаживанием кривой следует понимать представление ее функцией, непрерывной вместе с двумя первыми производными и имеющей заданное число точек перегиба. Термин «согласование» кривых означает, что сеточные кривые разных направлений при пересечении имеют общую точку. Кривые карнасовой сетки должны возможно меньше отклоняться от заданных точек.

Такая постановка задачи «сглаживания» и «согласования» кривых приводит нас мысль о привлечении к ее решению аппарата математического программирования.

Задачи математического программирования формулируются как задачи нахождения экстремума функции многих переменных (целевой функции), которые связаны между собой рядом условий-ограничений. В отличие от математического анализа, когда соответствующие условия записываются в виде равенств, математическое программирование оперирует условиями в виде неравенств, строгих и приближенных равенств.

Широкое возможности методов математического программирования позволяют решить разнообразие прикладных задач, в частности задачи проектирования. Требования, предъявляемые к ним к конкретному изделию, всегда можно представить в виде тех или иных условий, например в виде неравенств, фиксирующих соответствие параметров изделия техническим нормам, какому-либо технологическим или эксплуатационным ограничениям.

К наиболее разработанным разделам относятся линейное программирование, рассматриваемые проблемы, в которых как целевая функция, так и условия-ограничения линейны зависят от переменных, выбранных в качестве неизвестных. Линейное программирование предлагает целый ряд методов решения задач. Они реализуются в виде различных программ и включаются в состав математического обеспечения ЭВМ.

Относительно на одном из методов линейного программирования, который получил название «метода последовательного улучшения плана», или «симплекс-метода». Подробное обоснование его можно найти в специальной литературе [3]. Здесь же будет

или речь о расширении метода с целью использования его аппарата в рассматриваемой проблеме [4].

Задача линейного программирования формулируется следующим образом. Требуется найти экстремум целевой функции и переменных x_i ($i = 1, 2, \dots, n$)

$$L = a_{n+1,1}x_1 + a_{n+1,2}x_2 + \dots + a_{n+1,n}x_n, \quad (1)$$

крайем переменные x_i связаны между собой условиями-ограничениями различного вида

$$a_{ij}x_1 + a_{ij}x_2 + \dots + a_{ij}x_n \leq b_j; \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (2)$$

Знак \leq может быть заменен на знаки неравенства \leq , \geq , строгих равенств $=$ и приближенных равенств \approx . Соответственно, добавление в число условий-ограничений задачи линейного программирования приближенных равенств и является тем расширением симплекс-метода, о котором упоминалось выше.

Для выполнения условий в виде неравенств алгоритм задачи линейного программирования стремится приблизить значения левых частей неравенств к значениям их правых частей, а в лучшем случае сделать их равными.

Условие типа приближенного равенства

$$a_{ij}x_1 + a_{ij}x_2 + \dots + a_{ij}x_n \approx b_j$$

в результате решения задачи также может оказаться выполненным как строгое равенство. Но если этого не произойдет, то во всех случаях должно соблюдаться требование

$$\min |a_{ij}x_1 + a_{ij}x_2 + \dots + a_{ij}x_n - b_j|, \quad (3)$$

т. е. погрешка должна быть минимальной независимо от того, больше или меньше величины b_j значение левой части j -го условия.

Алгоритм симплекс-метода состоит в том, имея некоторый набор значений переменных $x_i^{(0)}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), удовлетворяющий всем условиям и принимающий целевой функции значение L_0 , можно перейти к другому набору значений $x_i^{(1)}$, для которого величина L_{1-1} будет больше или меньше L_0 в зависимости от того, что требуется найти — максимум или минимум функции L . В теории линейного программирования доказывается, что через некоторое число итераций будет получено оптимальное решение или поступит информация о неразрешимости задачи, например, вследствие противоречивости каких-либо условий.

Действие расширенного алгоритма симплекс-метода можно проследить, составив в каждой итерации матрицу, содержащую коэффициенты при неизвестных x_i ($i = 1, 2, \dots, n$), а также при дополнительных неизвестных $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$, с помощью которых все условия типа неравенств и приближенных равенств приводятся к строгим равенствам.

Рассмотрим сначала более простую задачу. Требуется найти максимум линейной функции, если все условия являются неравенствами типа «меньше», т. е.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2; \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m-1,1}x_1 + a_{m-1,2}x_2 + \dots + a_{m-1,n}x_n \leq b_{m-1}; \\ \max (a_{m+1,1}x_1 + a_{m+1,2}x_2 + \dots + a_{m+1,n}x_n). \end{cases} \quad (4)$$

Вводя вспомогательную переменную x_{n+1} , можно первое из условий переписать так:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1.$$

Учитывая это обстоятельство, составим исходную матрицу «симплекс-метода»

$$\begin{vmatrix} n+1 & b_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ n+2 & b_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n+m & b_m & a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & -a_{m+1,1} & -a_{m+1,2} & \dots & -a_{m+1,n} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} \quad (5)$$

В первом столбце матрицы стоят номера неизвестных, значения которых даны во втором столбце, причем все остальные переменные x_i следует считать равными нулю. В частности, в исходной матрице

$$\begin{aligned} x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0; \\ x_{n+1} = b_1; \\ x_{n+2} = b_2; \\ \dots \dots \dots \\ x_{n+m} = b_m. \end{aligned}$$

Последняя строка матрицы, в которую включены коэффициенты линейной функции с обратными знаками, содержит так называемые оценки столбцов матрицы.

В каждой итерации «симплекс-метода» выполняются следующие операции:

определяется столбец, в котором отрицательна оценка по модулю наибольшая, пусть это будет k -й столбец;

из всех отношений b_i/a_{ik} , $i \geq 0$ определяется минимальное, ему соответствует l -я строка;

номер k записывается в l -ю строку первого столбца, в каждый элемент c_{ij} всех других столбцов подвергается преобразованию по правилу (i -ая строка j -ая столбец)

$$c_{ll} := c_{1l} + (c_{1k} \cdot a_{lk}) : c_{lk} \quad j \neq k; \quad c_{lj} := c_{lj} : a_{lk}; \quad j = l.$$

В результате подобных последовательных преобразований получаются новый ряд матриц. Если в строке оценок очередной матрицы не окажется отрицательных элементов, то это свидетельствует об окончании итерационного процесса. Решение поставленной задачи, т. е. значения неизвестных x_i ($i = 1, 2, \dots, n + m$), как указывалось, найдется во втором столбце, а их номера — в первом столбце последней матрицы.

Простой подстановкой значений x_i в исходные условия можно проверить, что все условия удовлетворяются, причем те из них, которые исполняются как строгие равенства, имеют нулевые значения соответствующих дополнительных неизвестных, и наоборот, ненулевые значения последних дают величину в неравенствах.

В последней строке второго столбца матрицы окажется минимальное значение линейной функции, соответствующее полученному оптимальному решению.

Теперь рассмотрим, к чему приводит включение в условия (4) приближенных равенств.

В этом случае, прежде чем начинать итерационный процесс, необходимо преобразовать исходную матрицу (5).

Пусть первое m_1 условий является условиями типа «больше». Тогда в строке оценок записываем

$$-a_{m+1,i} - \sum_{j=1}^{m_1} a_{1j,i}; \quad i = 1, 2, \dots, n+m,$$

т. е. последовательное вычитаем из строки оценок первое m_1 строк матрицы. Новая строка оценок, по существу, учитывает требование минимума излодом: в приближенных равенствах (3). Выполненного преобразования исходной матрицы достаточно, чтобы далее включить в работу общий алгоритм «симплекс-метода».

В описании этого алгоритма отражены лишь вычислительные аспекты решения задачи линейного программирования. Оно не претендует на строгость изложения, тем более что в нем не рассмотрены условия типа «равно» и «меньше» и не отражено то, что переменные x_i могут иметь произвольный знак или быть только неотрицательными. Для решения задач линейного программирования «симплекс-методом» существует специальный, реализованный в виде машинных программ (5) математический аппарат, который, используя в качестве исходной информации матрицу коэффициентов и правых частей в условиях (2) и линейной функции (1) задачи линейного программирования, дает требуемое оптимальное решение. Это позволяет в дальнейшем при рассмотрении подобных задач лишь ограничиваться их формулировкой в том виде, который предназначен для использования математического аппарата.

Нарисная сетка судовой поверхности

Пусть заданные ординаты точек на судовой поверхности, среди которых обязательно должны быть точки пересечения кривых нарисной сетки, являются составляющими вектора \bar{Y} . Тогда имеем

$$Y \sim \bar{Y} \quad (6)$$

означает, что составляющие координат вектора \bar{Y} должны иметь малое отклонения от соответствующих составляющих вектора \bar{Y} и притом такие, что сумма модулей этих отклонений была бы наименьшей.

Для того чтобы составить условия, отражающие конечность числа точек перегиба на кривых сетки, необходимо определить вторые производные от функций, представляющих эти кривые, и удовлетворить требованию сохранения знака производных в интервалах между точками перегиба, т. е.

$$y'' \geq 0. \quad (7)$$

Выражение (7) следует трактовать так: смысл неравенства изменяется на обратный при переходе через точку перегиба кривой.

Очевидно, что для составления условий (7) необходимо иметь аналитическое выражение для каждой сеточной кривой, т. е. функциональную зависимость $y(x)$, в которую в качестве независимых переменных должны входить ординаты точек, или, что то же, составляющие вектора \bar{Y} . Действительно, только такая зависимость даст возможность сформулировать поставленную задачу в виде совместных условий (6) и (7).

Практически для образования функции $y(x)$ можно использовать любой метод аппроксимации плоской кривой. В частности, аппроксимируем каждую кривую одним полемном, имеющим заданное число перегибов [6]. Вспомогательная сложная полиномиальная зависимость $y(x)$. Эта проблема решается при наличии программы OPROS [5], но для этого требуется специальное время. Поэтому целесообразно выбрать более простой подход и ориентироваться на кубическую аппроксимацию плоской кривой.

Итак, рассмотрим подобную задачу. Пусть каждой участок плоской кривой в интервале $x_i < x < x_{i+1}$ аппроксимируется функцией

$$f_i(x) = d_i + c_i(x - x_i) + b_i(x - x_i)^2 + a_i\Phi_i(x - x_i). \quad (8)$$

где функция $\Phi(x)$ — монотонная вместе со своими двумя первыми производными, причем все они при $x = x_i$ принимают следующие значения:

$$\Phi_i(0) = \Phi'_i(0) = \Phi''_i(0) = 0. \quad (9)$$

В частном случае, когда $\Phi(x) = x^3$, функцию $f(x)$ называют кубическим сплайном. Представление кривой в виде выражения (8) имеет более общий характер, так как функция $\Phi(x)$ позволяет учитывать местные особенности на кривой, например участки с малой кривизной или, наоборот, близкие к дуге окружности и т. д.

Второй производная функции

$$f'' = 2b_i + 6a_i\Phi'_i(x - x_i) \quad (10)$$

в силу монотонности функции Φ'_i может изменить знак только один раз в интервале $x_i < x < x_{i+1}$, что соответствует одной точке перегиба на аппроксимирующей кривой в пределах этого интервала.

С помощью функций $f(x)$ удобно производить аппроксимацию кривых, образующих сетку на судовой поверхности, так как в этом случае условия (7) составятся на границах участков.

Пусть известны значения ординат y_i ($i = 1, 2, \dots, n$) на границах участков кривой. Тогда для обеспечения непрерывности функции $y = y(x)$ (представляющей всю кривую), а также первых двух ее производных необходимо выполнять следующие равенства:

$$\left. \begin{aligned} d_{i+1} - d_i + c(x_{i+1} - x_i) + b_i(x_{i+1} - x_i)^2 + a_i\Phi_i(x_{i+1} - x_i) &= y_{i+1}; \\ c_{i+1} - c_i + 2b_i(x_{i+1} - x_i) + 6a_i\Phi'_i(x_{i+1} - x_i); \\ b_{i+1} - b_i + \frac{1}{2} 6a_i\Phi''_i(x_{i+1} - x_i). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Эти рекуррентные соотношения служат для вычисления коэффициентов d , c , b и a , а также функции $\Phi(x)$.

На левом конце кривой принимаем

$$d_1 = y_1; \quad b_1 = 0; \quad c_1 = \operatorname{tg} \alpha,$$

где α — угол наклона касательной к кривой в начальной точке. Если угол α не задан, кроме всего прочего получить значение коэффициента c_1 с помощью численного дифференцирования.

Остановимся теперь на вопросе выбора фундаментальной функции $\Phi(x)$.

Одно из представлений этой функции, которое удовлетворяет условиям (9), имеет вид

$$\Phi_i(x) = (x - x_i)^3; \quad x_i \geq 3, \quad (12)$$

причем показатели степени x , подлежат определению.

Будем называть на кривой, включая ее концы, нечетное число точек

$$s-1; 1,5; 2; 2,5; \dots; n.$$

Тогда точки с четными номерами будут служить границами участков, на которые разбивается кривая, а точки с нечетными номерами будут использоваться только для задания параметра x_i . Это позволяет лучше учесть форму кривой на каждом участке, а также уменьшить количество неизвестных подыскать, так как из всех характеризующих кривую точек в число составляющих вектора Y войдет лишь половина.

Понимая, как вычисляется параметр x_i . Пусть, начиная с дальнего конца кривой, для всех участков до $(s-1)$ -го исключительно вычислим коэффициенты a, b, c, d и параметры x . По формулам (11) находим значения d_i, c_i и b_i , а затем вычислим

$$y_{i+0,2}^* - d_i + c_i(x_{i+0,2} - x_i) + b_i(x_{i+0,2} - x_i)^2;$$

$$y_{i+1}^* - d_i + c_i(x_{i+1} - x_i) + b_i(x_{i+1} - x_i)^2.$$

Для определения величин x_i и a_i имеем следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} a_i(x_{i+0,2} - x_i)^2 &= y_{i+0,2} - y_{i+0,2}^* \\ \beta_i(x_{i+1} - x_i)^2 &= y_{i+1} - y_{i+1}^* \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Отсюда

$$x_i = \ln \frac{y_{i+0,2} - y_{i+0,2}^*}{y_{i+1} - y_{i+1}^*} : \ln \frac{x_{i+0,2} - x_i}{x_{i+1} - x_i}; \quad (14)$$

$$a_i = (y_{i+1} - y_{i+1}^*) : (x_{i+1} - x_i)^2. \quad (15)$$

Формулы (14) и (15) дают возможность найти параметры x_i последовательно по участкам, иде до кривой слева направо, после чего функции $\Phi_i(x)$ согласно выражению (12) определены полностью.

Отметим, что для концов участков судовых обводов, притягивающихся к диаметральной плоскости под углами, близкими к 90° (например, для шпангоута в районе плоского дельта, которое в предельном виде горизонтальным), необходимо иметь соответствующее выражение для фундаментальной функции $\Phi_i(x)$.

Это выражение имеет вид

$$\Phi_{s-1}(x) = (x_s - x_{s-1}) \left[r_{s-1} - \sqrt{r_{s-1}^2 - \left(\frac{x - x_{s-1}}{x_s - x_{s-1}} \right)^2} \right], \quad (16)$$

причем для определения параметра r используются условия

$$a_{s-1}(x_s - x_{s-1})(r_{s-1} - \sqrt{r_{s-1}^2 - 1}) - y_s - y_s^*$$

$$a_{s-1} : \sqrt{r_{s-1}^2 - 1} = y_s - y_s^*.$$

Отсюда, подставив

$$r_{s-1} \sqrt{r_{s-1}^2 - 1} - (r_{s-1}^2 - 1) = \frac{y_s - y_s^*}{[y_s - (y_s^*)^2](x_s - x_{s-1})} = h,$$

получим

$$r_{s-1} = \frac{1-h}{\sqrt{1-2h}};$$

$$a_{s-1} = \frac{y_s - y_s^*}{x_s - x_{s-1}} \frac{1}{r_{s-1} - \sqrt{r_{s-1}^2 - 1}}.$$

В частности, при $y_s^* \rightarrow \infty$ (т.е. 90°) величина h обращается в нуль, что дает значение $r_{s-1} = 1$.

Осталось показать, каким образом составляются условия (7) для вторых производных аппроксимирующих функций.

Обратим внимание на то, что коэффициенты a, b, c и d , входящие в выражения для этих функций, линейно зависят от значений ordinat кривых на границах участков. Это означает, что интерполирование по вторые производные также линейно зависит от ordinat, т.е. левая часть условий (7) имеет вид

$$y_i^* = \sum_{k=1}^{s-1} c_{ik} y_k; \quad k=2, 3, \dots, n.$$

Для вычисления коэффициентов c_{ik} используем следующий прием. Пусть задан произвольный набор значений ordinat на границах участков $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Тогда, вычислив коэффициенты a, b, c, d и параметры фундаментальных функций, получаем возможность найти значения вторых производных на границах участков, т.е. определить величину y_i^* . Ввиду того что

$$c_{ik} = \frac{\partial y_i^*}{\partial y_k} = \frac{\Delta y_i^*}{\Delta y_k}, \quad (17)$$

достаточно найти значения y_i^* для некоторого набора Y_0 и наборов $Y_k = (y_1, y_2, \dots, y_k + \Delta y_k, \dots, y_n)$, полученных из начального после приращения произвольного приращения поочередно каждой ordinat y_k . Входящие в формулу (17) выражения Δy_i^* соответствуют приращению Δy_i .

Если при составлении условий (7) использовались крайние сетки необходимо определять коэффициенты c_{ik} , то при составлении условий согласования крайних и максимального отклонения (8) вычислять ничего не нужно, так как эти условия имеют простейшую форму

$$y_i = \bar{y}_i. \quad (19)$$

Напомним, что \bar{y}_i — заданные значения ordinat точек, а y_i —

Оба типа условий составляются для всех кривых, образующих каркасную сетку судовой поверхности, но при этом нужно иметь в виду, что для точек шарошечки кривых условия (58), естественно, не повторяются дважды.

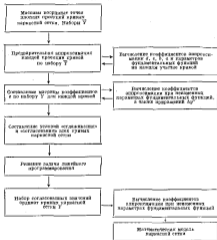


Рис. 1. Упрощенная блок-схема алгоритма аппроксимации линий каркасной сетки.

Решая задачу математического программирования, находим значения ординат y_{ij} для точек, лежащих на исходной поверхности. Они образуют набор Y . Если для этого набора вычислить коэффициенты аппроксимирующих функций, то все кривые будут представлены аналитически. На рис. 1 показана блок-схема алгоритма, реализующего вышеописанный математический аппарат аппроксимации каркасной сетки судовой поверхности.

Математическая модель судовой поверхности

Для представления судовой поверхности с помощью каркасной сетки пересекающихся кривых наряду с ортогональной системой необходимо ввести криволинейную систему координат в связи с тем, что сеточные кривые могут быть как плоскими, так и пространственными.

Возьмем в качестве криволинейных координат параметры p и q и будем рассматривать линии каркасной сетки как координатные. Координатной называется такая линия, на которой одна из двух координат принимает постоянное значение. Это позволяет принять для линий сетки обозначения $u_i(p)$ и $v_j(q)$, причем кривыми i и j присваиваются линиям разных направлений. Очевидно, что u_i и v_j — это значения ординат тех точек, которые лежат на линиях сетки. Значение ординаты точки поверхности в узле обозначим через y_{ij} .

Предположим, что уравнение произвольной линии i -го направления ($q = const$) выражается через уравнения сеточных линий того же направления следующим образом:

$$u(p) = \sum_{i=1}^n \xi_i u_i(p), \quad (19)$$

где ξ_i — неизвестные коэффициенты.

Криволинейная координата p выбирается так, что на линиях j -го направления она принимает постоянное значение, а значения $u_i(p)$ становятся равны ординатам y_{ij} в узлах. В то же время точки пересечения произвольной линии $u(p)$ с сеточными линиями j -го направления определяются как ординаты этих линий при $q = const$. Чтобы не вводить новых обозначений, будем считать, что ординаты точек пересечения линии $u(p)$ с линиями j -го направления образуют матрицу-столбец u , а ординаты узлов сетки матрицу

$$A = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots \\ y_{21} & y_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Тогда, если одинаковое количество линий i -го и j -го направлений, вместо равенства (19) получаем систему уравнений

$$u = A \xi, \quad (20)$$

где ξ — матрица-столбец неизвестных коэффициентов.

Решая систему (20), находим их значения

$$\xi = A^{-1}u,$$

которые позволяют вычислять ординату любой точки на линии и (p) , если известны ординаты на линиях $u_i(p)$, отвечающие параметру q — высоте. Эти ординаты образуют матрицу-строку v ; поэтому ординаты точки поверхности, лежащая на пересечении двух произвольных линий и (p) и $v(q)$, вычисляются следующим образом:

$$y(x, z) = y(p, q) = v\xi = \\ = vA^{-1}u = vBu, \quad (21)$$

где $B = A^{-1}$.

В частном случае, когда известны всего четыре линии сетки u_1, u_2, v_1 и v_2 , они образуют одно поле, в четырех углах которого

Рис. 2. Поле сетки произвольной формы.

известны значения ординат точек Y_{11}, Y_{12}, Y_{21} и Y_{22} (рис. 2). Составим матрицу

$$B = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{vmatrix}^{-1} = \frac{1}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21}} \begin{vmatrix} \beta_{22} & -\beta_{12} \\ -\beta_{21} & \beta_{11} \end{vmatrix}$$

а затем уравнение судовой поверхности

$$y = \frac{1}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21}} (\beta_{22}u_1\beta_{11} - \beta_{12}u_2\beta_{11} - \beta_{21}u_1\beta_{22} + \beta_{11}u_2\beta_{22}).$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что эта поверхность проходит через все линии сетки и, конечно, через все углы ее. Например, если мы хотим найти значения ординат во линии u_2 , то это значит, что на линиях v_1 и v_2 нужно взять ординаты точек их пересечения с линией u_2 , т. е. в соответствующих углах сетки.

Подставляя в уравнение судовой поверхности вместо u_1 и u_2 значения Y_{11} и Y_{12} , имеем

$$y = \frac{1}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21}} (\beta_{22}u_1\beta_{11} - \beta_{12}u_2\beta_{11} - \beta_{21}u_1\beta_{22} + \beta_{11}u_2\beta_{22}) = u_2.$$

Матричное выражение (21) для уравнения судовой поверхности легко вычисляется, когда поле сетки имеет прямоугольную форму, т. е. когда сеточные линии представляют собой обводы плоских сечений, параллельных координатным плоскостям. Уравнения таких линий имеют характерное отличие: они содержат

одну независимую переменную, соответствующую своему направлению, например,

$$u_1 = u_1(x); \quad v_1 = v_1(z).$$

В общем случае поле сетки имеет произвольную форму (рис. 2). Заданной точке (x, z) отвечают те же значения параметров p и q , т. е.

$$\bar{x} = x^p; \quad \bar{z} = z^q.$$

В этих обозначениях проекция точки на координатные линии будет такова:

$$(x^p, z^q); \quad (x^1, z^1); \quad (x^2, z^2); \quad (x^3, z^3).$$

После того как они будут вычислены, их значения нужно подставить в уравнение сеточных линий, входящих в выражение (21). Заметим, что согласно определению проекции точки линии, соединяющие точку (\bar{x}, \bar{z}) с ее проекциями, окладами координатных линиями. Этот факт фиксируется с помощью соотношений

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^p - x_{11}}{x_{12} - x_{11}} = \frac{z^q - z_{11}}{z_{12} - z_{11}} = \frac{x^p - x_{11}}{x^{12} - x^{11}} = p; \\ \frac{x^p - x_{21}}{x_{22} - x_{21}} = \frac{z^q - z_{21}}{z_{22} - z_{21}} = \frac{x^p - x_{21}}{x^{22} - x^{21}} = q, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

а также

$$\begin{aligned} z^{p2} = x^p(z^{p2}); \quad x^{12} = x^1(z^{12}); \\ z^{p3} = x^p(z^{p3}); \quad z^{23} = x^2(z^{23}). \end{aligned}$$

В случае прямоугольной формы поля

$$\begin{aligned} x^{p2} = x_{21} - x_{11}; \quad x^{12} = x_{22} - x_{12}; \\ z^{p3} = z_{12} - z_{11}; \quad z^{23} = z_{22} - z_{21}; \end{aligned}$$

$$\Delta x = x_{21} - x_{11} = x_{22} - x_{12}; \quad \Delta z = z_{21} - z_{11} = z_{22} - z_{12}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{x^p - x_{11}}{\Delta x} = \frac{x^1 - x_{11}}{\Delta x} = \frac{\bar{x} - x_{11}}{\Delta x} = p; \\ \frac{x^p - x_{21}}{\Delta x} = \frac{x^2 - x_{21}}{\Delta x} = \frac{\bar{x} - x_{21}}{\Delta x} = q. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$x^p = x^{11} + \bar{x}; \quad z^q = z^{11} + \bar{z}.$$

Последние равенства подтверждают тот факт, что в случае прямоугольной формы поля сетки для вычисления ординаты y можно подставлять в уравнение судовой поверхности значения \bar{x} и \bar{z} .



Рис. 3. Блок-схема вычислительной процедуры для определения значений параметров p и q .

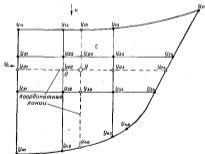


Рис. 4. Определение ординат произвольной точки кривой поверхности. ● — точка произвольной точки сетки; ○ — точка, лежащая на произвольных линиях; ○ — девятая точка.

В общем случае решение уравнений (22) производится методом последовательных приближений. На рис. 3 показана блок-схема вычислительной процедуры. За несколько итераций находится все приближения значений p и q , а также значения параметров p и q . Итерационный процесс прекращается после того, как параметры p и q , вычисленные с установленной точностью, перестают изменяться.

Найденные параметры p и q сокращают свои значения ввиду на координатных линиях, проходящих через заданную точку. Это позволяет с помощью соотношений (22) и уравнений проецирования сеточных линий $y(x)$ и $z(z)$ найти ортогональные координаты для точек пересечения координатных линий с линиями сетки.

Итак, для вычисления ординат произвольной точки кривой поверхности (рис. 4), по существу, необходимо знать ординаты узлов кривой сетки и ординаты точек пересечения двух координатных линий с линиями сетки.

Записав значения всех этих ординат в виде матрицы

$$C = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1k} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{k1} & y_{k2} & \dots & 0 \end{vmatrix} \quad (23)$$

Эта матрица строится путем означивания матрицы ординат узлов A матрицей y и v .

Пусть последовательных преобразований матрицы C по специальным правилам можно вычислить исходную ординату точки поверхности, не составляя обратной матрицы $B = A^{-1}$. Если обозначить элементы последовательных матриц как

$$C_{ij}^{(1)}, C_{ij}^{(2)}, \dots; \quad i=1, 2, \dots, k; \quad j=1, 2, \dots, k,$$

то, преобразуя исходную матрицу $(k-1)$ раз по следующим правилам:

$$C_{ij}^{(2)} = C_{ij}^{(1)} - \frac{C_{ij}^{(1)} \cdot C_{11}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}}; \quad i=1, 2, \dots, k; \quad j=1, 2, \dots, k;$$

$$C_{ij}^{(3)} = C_{ij}^{(2)} - \frac{C_{ij}^{(2)} \cdot C_{12}^{(2)}}{C_{12}^{(2)}}; \quad i=2, 3, \dots, k; \quad j=2, 3, \dots, k;$$

$$\dots$$

$$C_{ik}^{(k)} = C_{ik}^{(k-1)} - \frac{C_{ik}^{(k-1)} \cdot C_{k-1, k}^{(k-1)}}{C_{k-1, k}^{(k-1)}},$$

получим

$$y = -C_{ik}^{(k)}.$$

Приведем пример

$$y = \begin{vmatrix} 5 & 4,5 & 4,8 \\ 3,6 & 2,6 & 3,2 \\ 4 & 3,5 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2,6 - (3,6 \cdot 4,5) : 5 & 3,2 - (3,6 \cdot 4,8) : 5 \\ 0 & 3,5 - (4 \cdot 4,5) : 5 & -(4 \cdot 4,8) : 5 \end{vmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,64 & -0,256 \\ 0 & -0,4 & -3,84 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3,84 + (0,4 \cdot -0,256) : 0,64 \end{vmatrix}$$

$$y = 3,84 - 0,04 = 3,8.$$

В дальнейшем равенство

$$m = |d_{ij}|$$

будет обозначать, что произвольная квадратная матрица D подвергается преобразованиям по указанным выше правилам для вычисления значений m .

Изложенный способ определения координат произвольной точки судовой поверхности относится к интерполяционным методам и поэтому обладает известными недостатками. Заранее можно утверждать, что если все линии картовой сетки имеют кривизну одного знака, то и промежуточные линии, получаемые в результате интерполяции, будут иметь эту кривизну. Но если, например, среди сеточных линий есть обводы линзоватого бульбообразной формы, то при интерполяции они могут изогнуть обводы интерполируемых шпангоутов, расположенных вблизи мадел. В таких случаях целесообразно подразделять судовую поверхность на части, применяя интерполяционную процедуру к каждой части отдельно.

Предложим деление поверхности на районы, причем в пределах каждого поля картовой сетки, т. е. для вычисления ординаты какой-либо точки поверхности достаточно рассмотреть только четыре сеточные линии, ограничивающие поле, в котором находится точка. Однако при этом возникает затруднение с обеспечением непрерывности интерполируемых кривых при переходе через границы отдельного поля. Рассмотрим на рис. 4 два соседних поля A и B и некоторую точку G на границе между ними. В этой точке определим ординату и горизонтальную производную:

$$y_{AG} = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & 0 \end{vmatrix}; \quad y'_{AG} = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & 0 \end{vmatrix};$$

для поля B

$$y_{BG} = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & 0 \end{vmatrix}; \quad y'_{BG} = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & 0 \end{vmatrix}.$$

Нетрудно установить, что

$$y_{AG} = y_{BG} = y_{BG}; \quad y'_{AG} \neq y'_{BG}.$$

т. е. непрерывность по производным не обеспечивается.

Для устранения разрыва непрерывности введем поправку в формулу, с помощью которой вычисляется ордината y произвольной точки на поле A . Поправка должна откорректировать разрыв горизонтальной производной на границе между полями B и A и вертикальной производной на границе между полями C и B (рис. 4).

Для выбранных полей имеем

$$\bar{y}_A = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & 0 \end{vmatrix};$$

$$\bar{y}'_{A, x=0} = \begin{vmatrix} y_{12} & y_{13} & \bar{y}'_{13} \\ y_{22} & y_{23} & \bar{y}'_{23} \\ y_{32} & y_{32} & 0 \end{vmatrix}; \quad \bar{y}'_{A, z=0} = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{31} & 0 \end{vmatrix};$$

$$\bar{y}'_{B, x=0} = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \bar{y}'_{12} \\ y_{21} & y_{22} & \bar{y}'_{22} \\ y_{31} & y_{32} & 0 \end{vmatrix}; \quad \bar{y}'_{B, z=0} = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{31} & 0 \end{vmatrix}.$$

Ордината y_A с учетом поправки принимает вид

$$y_A = \bar{y}_A + \alpha_A \frac{(y - y_{22})(y_{32} - y)^2}{(y_{32} - y_{22})^2} + \beta_A \frac{(y - y_{22})(y_{32} - y)^2}{(y_{32} - y_{22})^2}, \quad (24)$$

где коэффициенты α_A и β_A подлежат определению из условий равенства производных по обе стороны от границ.

Составив аналогичные выражения для полей B и C и взяв соответствующие производные, получаем

для поля A

$$\bar{y}'_{A, x=0} = \bar{y}'_{A, x=0} + \alpha_A;$$

$$\bar{y}'_{A, z=0} = \bar{y}'_{A, z=0} + \beta_A;$$

для поля B

$$\bar{y}'_{B, x=0} = \bar{y}'_{B, x=0};$$

для поля C

$$\bar{y}'_{C, z=0} = \bar{y}'_{C, z=0}.$$

Сравнивая производные, найденные для одной и той же точки, но по обе стороны от границы, находим

$$\left. \begin{aligned} \alpha_A &= \bar{y}_{A, z_{i+1}} - \bar{y}_{A, z_{i-1}} \\ \beta_A &= \bar{y}_{C, z_{i+1}} - \bar{y}_{A, z_{i-1}} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Формулы (24) и (25) определяют следующий алгоритм вычисления ординаты произвольной точки поверхности:

устанавливается вола, в котором находится искомого точка; выбираются два соседних с ним вола; для вола оконечности — сверху и слева; для вола нормоной оконечности — сверху и справа. Если соседних волов нет, то полагаем или $\alpha = 0$, или $\beta = 0$, или $\alpha = \beta = 0$ соответственно;

для трех волов из уравнений сеточных линий вычисляются значения ординат в произвольных в узловых точках, а также ординат точек пересечения координатных линий с сеточными; составляются и преобразуются матрицы для вычисления всех величин, входящих в формулы (24) и (25);

вычисляются коэффициенты α и β , а затем ордината y .

Таким образом, имея математическую модель судовой поверхности в виде жарисной сетки, можно находить значение ординаты произвольной точки двумя способами.

Первый способ позволяет скатигивать поверхность на всю сетку или на ее части, но при этом все сеточные кривые должны иметь одинаковый знак кривизны. Этому требованию обычно отвечает поверхность корпуса в средней части судна. Для вычисления ординаты произвольной точки составляется одна матрица типа матрицы (25). В нее входят ординаты узловых точек сетки и точки пересечения координатных линий с сеточными. Так как матрица (23) квадратная, необходимо выбрать столько сеточных линий, чтобы их количество в одном направлении совпадало с числом линий в другом направлении.

Второй способ интерполяции с использованием отдельных волов лучше применять для определения поверхности оконечности судна. Алгоритм его был описан выше.

Возвращаясь к построению математической модели судовой поверхности, можно заметить, что оно сводится к решению двух, но существу, взаимосвязанных задач — аппроксимации жарисной сетки и интерполяции по ней. При программной реализации этих задач получается также два комплекса программных модулей, которые образуют программы «аппроксимация» и «интерполяция». Программа «интерполяция» получает исходную информацию из программы «аппроксимация» в виде коэффициентов аппроксимации сеточных кривых. Для программы «интерполяция» исходную информацию составляет преобрант. При этом удобно пользоваться специальным входным языком, который описан в приложении.

Программа «аппроксимация» состоит из нескольких программных модулей, каждый из которых обрабатывает информацию,

соответствующую участку кривой, всей кривой и сетке кривых. Эти модули построены таким образом, что они выполняют следующие функции: предварительную аппроксимацию отдельных кривых, составление матрицы коэффициентов условий задачи линейного программирования по согласованию кривых разных направлений и окончательную аппроксимацию кривых сетки.

Естественно, в программе «аппроксимация» входит самостоятельный программный модуль, который решает задачу линейного программирования, расширенную из-за введения условий типа приближенных равенств [5].

Программа «интерполяция», по существу, является стандартной численной процедурой, которая включается в программы, реализующие различные варианты математической модели судовой поверхности.

Применение математической модели судовой поверхности

Языковая книга. В жарисную сетку включаются обводы: надубной линии, диаметральной линии, границы цилиндрической вставки, а также обводы нескольких шпангоутов и катерлиний. После согласования кривых сетки и их оперирования мы получаем такую математическую модель судовой поверхности, с помощью которой можно составлять таблицу ординат на линиях пересечения любых шпангоутов, а при желании — в любых точках поверхности, пересекающих судовую поверхность.

При составлении языковой книги вычисляются ординаты точек, положение которых задается в виде

$$x_1(\Delta z) x_2; \quad z_1(\Delta z) z_2,$$

где x_1 и x_2 — абсциссы крайних шпангоутов; Δz — шагция; z_1 и z_2 — аппликаты крайних точек по высоте судна; Δz — шаг по высоте.

Аналогично формируется информация для чертеновой машины, необходимой для воспроизведения теоретического чертежа. Учетным, что чертеновая машина фактически измеряет вместо

кривых дайвинг линии, нужно назначить на обводах шпангоутов и интерлиний такое количество точек, при котором вышесказанное будет несомненно. Это приводит, конечно, к значительному увеличению объема информации, однако при использовании в качестве носителя информации магнетной ленты воздействие ее — только дело времени.

«Образовываемые» конструкции корпуса. Если требуется найти обвод линии пересечения плоскости общего положения с судовой поверхностью, то поступают следующим образом. Пусть задан угол наклона θ этой плоскости к основной плоскости корпуса судна, а также след ее на двимеральной плоскости. Пусть след перемещают произвольной шпангоут на высоте l . Тогда точка (y_0, z_0) на обводе шпангоута, принадлежащая плоскости общего положения, должна удовлетворять уравнению

$$z_0 + y_0 \operatorname{tg} \theta = l.$$

Это уравнение решается в результате нескольких итераций. Сначала находим связь

$$l - m \Delta z + y_m \operatorname{tg} \theta > l > l - (m+1) \Delta z + y_{m+1} \operatorname{tg} \theta,$$

причем y_m — ордината точки, высотой аппроксиму $l - m \Delta z$, затем производим уточнение координат вышесказанной точки путем переноса на Δz и сужения «шага» до тех пор, пока с некоторой точностью не будут определены значения z_0 и y_0 .

Аналогично решается задача о пересечении борта с судовой поверхностью. Пусть борт задан ординатой y_0 . Ищем связь

$$y(m \Delta z) < y_0 < y(m \Delta z + \Delta z); \quad m=0, 1, 2, \dots$$

а затем уточним абсциссу z_0 , соответствующую ординате y_0 . **Вычисление производных и интегральных величин.** Производная в любой точке поверхности легко вычисляется, если исходить из матрицы (25). Обращаясь, для наглядности, к рис. 4, имеем

$$y'_x = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & 0 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{y_{11}}$$

$$y'_z = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1/y_{11} + 1/y_{22} & \dots & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Аналогично вычисляются и интегральные величины

$$\int_{z_1}^{z_2} y \, dx = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & \int_{z_1}^{z_2} y_{1n} \, dx \\ y_{21} & y_{22} & \dots & \int_{z_1}^{z_2} y_{2n} \, dx \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & 0 \end{vmatrix};$$

$$\int_{z_1}^{z_2} y \, dz = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int_{z_1}^{z_2} y_{n1} \, dz & \int_{z_1}^{z_2} y_{n2} \, dz & \dots & 0 \end{vmatrix};$$

$$\int_{z_1}^{z_2} \int_{x_1}^{x_2} y \, dx \, dz = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & \int_{z_1}^{z_2} y_{1n} \, dx \\ y_{21} & y_{22} & \dots & \int_{z_1}^{z_2} y_{2n} \, dx \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int_{z_1}^{z_2} y_{n1} \, dz & \int_{z_1}^{z_2} y_{n2} \, dz & \dots & 0 \end{vmatrix} \quad (26)$$

Если интегрирование ведется вдоль пространственной кривой, то нужно учитывать обе ее проекции. Например,

$$\int_{z_1}^{z_2} y_{1n} \, dx = \int_{z_1}^{z_2} y_{1n}(z) \sqrt{1 + [z'_{1n}(z)]^2} \, dz.$$

Возникающая при этом трудность вычисления можно избежать, если в маршевую сетку включать только обводы плоских сечений судовой поверхности и обвод диаметральной плоскости, который точно фиксирует контур шпангоутов и интерлиний, имея в то же время нулевую ординату.

Траектория плавки обшивки корпуса судна. Задача вычисления линии плавки на судовой поверхности формально сводится к пределению линии, эквипотенциальной какому-либо заданному полю. Совершенно очевидно, что подобная задача решается последовательным рассмотрением плавки, начиная от нижней линии, с одной стороны, и верхней линии, с другой. Обычно в качестве исходной берут также судовую линию.

Линия палл фиксируется точками ее пересечения с обводами шпангоутов. Для того чтобы получить координатную линию, достаточно найти координаты точек, отстоящих на одинаковых расстояниях от заданных точек, причем, естественно, расстояние b должно отсчитываться по дуге обвода, т. е.

$$\int_{z_0}^{z_1} \sqrt{1 + (y')^2} dx = b. \quad (27)$$

В этом уравнении нижний предел интегрирования z_0 относится к заданной точке, а верхний предел z_1 необходимо найти. Используя математическую модель судоной поверхности для вычисления производных y' , выполним шагловое интегрирование с заданным шагом Δz и вместо уравнения (27) получим

$$\Delta z_1 \sqrt{1 + (y')_1^2} - b - \left[\frac{1}{2} \Delta z \sqrt{1 + (y')_0^2} + \Delta z \times \right. \\ \left. \times \sum_{n=1}^k \sqrt{1 + (y')_n^2} \right] = b_1, \quad (28)$$

причем количество точек между точками z_0 и z_1 должно быть таким, чтобы правая часть выражения (28) была положительна. Пусть число их будет n , тогда путем деления шага

$$\Delta z_0 = z_1 - (n + 0,5) \Delta z$$

находим такое значение z_1 , при котором

$$\Delta z_1 \sqrt{1 + (y')_1^2} = b_1.$$

Описанный способ определения длины дуги обвода шпангоута может быть использован также для вычисления полных длин обводов шпангоутов, необходимым для построения раскладки наружной обшивки судоного корпуса.

Решение интегральных уравнений. Многие задачи обшивки судна сводятся к решению уравнений типа

$$\sigma(x, y, z) = \varphi(x, y, z, \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \frac{\partial \sigma}{\partial y}) + \\ + K \int \int \int \sigma(\xi, \eta, \zeta) f(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, \frac{\partial \sigma}{\partial \xi}, \frac{\partial \sigma}{\partial \eta}, \frac{\partial \sigma}{\partial \zeta}) \cdot \\ \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} d\xi d\eta d\zeta, \quad (29)$$

в которых функции σ неизвестны, а вид функций φ и f задан.

Для решения интегральных уравнений типа (29) используются итерационные методы. В частности, коллал в нулевом приближении

$$\sigma^{(0)} = \varphi,$$

можно организовать итерационный процесс

$$\sigma^{(n)} = \varphi + K \int \int \int \sigma^{(n-1)} f d\xi d\eta d\zeta,$$

где n — номер итерации. Вычислительный процесс заканчивается тогда

$$\max |\sigma^{(n)} - \sigma^{(n-1)}| < \epsilon,$$

где величина ϵ определяет точность расчета.

Математическая модель судоной поверхности позволяет не только вычислять значения ординат y и z и производных $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial y}{\partial z}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial z}$, но и значительно ускоряет итерационный процесс. Для численного интегрирования в правой части уравнения (29) приходится назначать достаточно много точек (ξ, η, ζ) , в которых вычисляются значения подынтегрального выражения. Если количество их равно m , то, имея в виду последующее приближение, необходимо брать m точек (x, y, z) , т. е. m раз вычислять двукратный интеграл. Это значительно увеличивает затраты машинного времени. При использовании математической модели судоной поверхности воспользуемся следующим образом. Выберем n точек (x, y, z) , причем $n < m$, и вычислим в каждой функции $\sigma(x, y, z)$. Далее, «набегав» на эти точки поверхности, итерационным путем определяем m значений функции $\sigma(\xi, \eta, \zeta)$, которые входят под знак интеграла в выражении (29).

Так как значение n можно выбрать в несколько раз меньшим величинам m , достигается существенное сокращение затрат машинного времени (примерно в $n:m$ раз).

Вопрос «сухого» моделирования. Математическая модель судоной поверхности может быть применена при решении проблемы «сухого» моделирования, т. е. предельной величины сопротивления судна без испытаний модели в открытом бассейне.

Обратим внимание на матрицу (26), определяющую двукратный интеграл. Выбранные представление судоной поверхности привело к упрощению расчетной работы, так как на самом деле нужно вычислять простые интегралы и притом от аналитических функций, представляющих линии карманной сетки. Это имеет существенное значение в расчетах динамики судна, в которых встречаются интегралы типа

$$\int \int \int y \varphi(x, z) dx dy dz, \quad (30)$$

где Ω — смоченная поверхность, а $\psi(x, z)$ — произвольная функция.

Если функция $\psi(x, z)$ имеет вид

$$\psi(x, z) = \psi_1(x)\psi_2(z),$$

то вместо интеграла (30) надо вычислять значительно более простые интегралы, к которым входит раздельно ординаты обводов ватерлиний или эпитоусов, а пределы интегрирования определяются смоченной частью поверхности судна. Действительно, из матрицы (26) видно, что необходимо найти значения интегралов

$$\int y_{0i}\psi_1(x) dx; \int y_{0i}\psi_1(x) dx; \dots \\ \int y_{0i}\psi_2(z) dz; \int y_{0i}\psi_2(z) dz; \dots$$

а затем, выполнив стандартное преобразование матрицы, в которую она входит в качестве элементов, вычислять интеграл (30).

Рассмотрим одно конкретное представление функции

$$\psi(x, z) = \frac{\cos}{\sin} (\mu x) e^{-\nu z}.$$

Это выражение типично для теории волнового сопротивления судна. Характерно и то, что параметры μ и ν в рабочих диапазонах принимают также значения, которые приводят к сильной осцилляции функции $\psi(x, z)$, а следовательно, к значительным трудностям при вычислении интеграла (30). Описанный выше метод сводит, по существу, весь расчет к вычислению интегралов

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \int_{x_1}^{x_2} y_{0i} \frac{\cos}{\sin} (\mu x) dx; \\ I_2 &= \int_{z_1}^{z_2} y_{0i} e^{-\nu z} dz. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

где y_{0i} — ординаты точек на обводах ватерлиний; y_{0i} — ординаты точек на обводах эпитоусов.

Ввиду того что эти кривые входят в квадратную сетку и имеют аналитическое представление, интегралы (31) легко брать по частям

$$I_1 = \frac{1}{\mu} \left[\pm y_{0i} \frac{\sin}{\cos} (\mu x) + \frac{1}{\mu} y_{0i}' \frac{\cos}{\sin} (\mu x) \mp \frac{1}{\mu^2} y_{0i}'' \frac{\sin}{\cos} (\mu x) \dots \right]_{x_1}^{x_2}; \\ I_2 = -\frac{e^{-\nu z}}{\nu} \left(y_{0i} + \frac{1}{\nu} y_{0i}' + \frac{1}{\nu^2} y_{0i}'' \dots \right)_{z_1}^{z_2}.$$

В последних формулах достаточно оставить по три слагаемых, чтобы обеспечить необходимую точность вычислений.

Итак, сеточный метод представления поверхности корпуса судна дает возможность довольно просто и быстро находить значения интегралов вида

$$\frac{P}{P'} = \int_0^1 y \frac{\cos}{\sin} (\mu x) e^{-\nu z} dx dz. \quad (32)$$

Известно, что расчет коэффициентов волнового сопротивления теоретическим путем не дает достоверных результатов. Авторы теоретических методов расчета [7] вынуждены вводить в расчетные формулы различные поправочные коэффициенты по данным эксперимента.

Другой путь заключается в статистической обработке результатов многочисленных испытаний в опытовом бассейне. В этом случае строятся расчетные формулы, связывающие некоторую величину с тем или иным фактором — характеристиками рассматриваемого объекта.

Если задаться целью построить расчетную формулу для коэффициента волнового сопротивления, точнее, для коэффициента остаточного сопротивления, то в качестве факторов необходимо выбрать какие-то величины, связанные с формой судовой поверхности. К сожалению, математическая статистика оставляет за исследователем вопрос о выборе математической модели явления, иначе говоря, вопрос о выборе самих факторов. Действительно, в зависимости от опыта исследователя, а возможности от того, как он изучает рассматриваемое физическое явление, и предлагаются различные совокупности факторов при обработке одного и того же эксперимента. Не удивительно, что и результаты по сконструированным различными авторами формулам получаются разными.

Для того чтобы избежать субъективности в выборе математической модели, включающей вид расчетной формулы и набор факторов, необходимо исходить из теории явления, хотя бы качественно отражающей его.

Можно заметить, что структура формул, полученных теоретическим путем и предложенных для вычисления коэффициента волнового сопротивления, имеет следующую форму:

$$L = \sum_{i=1}^n a_i M_{i0}. \quad (33)$$

где

$$M_{i0} = \left(\frac{1}{V} R_{i0} \right)^2 + \left(\frac{1}{V} R_{i0}' \right)^2;$$

a_i — коэффициенты.

Примем равенство (33) в качестве расчетной формулы для коэффициента остаточного сопротивления, а в качестве факторов — величины M_{i0} . В них входят интегралы (32), значения которых

зависит от формы судовой поверхности, а также от параметров μ и ν . Эти параметры назначаются так:

$$\mu = \alpha R_0; \quad \nu = \beta R_0^2; \quad R_0 = \frac{L}{U \sqrt{Fr}},$$

где L — длина судна; Fr — число Фруда, α и β — числовой коэффициент, одновременно являющийся значением фактора и статистического коэффициента a_n .

Математическая статистика предлагает для определения коэффициентов a_n , главным образом, метод наименьших квадратов, на котором строится весь аппарат оценки достоверности полученных результатов. Однако этот метод не единственно возможный.

Метод наименьших модулей [8] также может служить для нахождения коэффициентов a_n . Опыт показывает, что этот метод имеет ряд практических преимуществ и легко реализуется с помощью аппарата математического программирования, описанного в § 1.

Формально задача определения коэффициентов a_n заключается в виде совокупности уравнений равенств

$$\sum_{j=1}^N a_n M_{n,j} \approx \zeta_n; \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (34)$$

Здесь N — количество экспериментов или, что то же самое, количество моделей, для которых известны результаты испытаний и значения коэффициентов остаточного сопротивления ζ_n ; для последних по теоретическим чертежам вычислены факторы $M_{n,j}$.

Как было упомянуто выше, знак \approx в выражениях (34) следует понимать в том смысле, что при решении задачи отыскивается такая совокупность неизвестных a_n , которая отбрасывает наименьшую сумму невязки в приближенных равенствах. Наличие коэффициентов a_n позволяет определить коэффициент остаточного сопротивления для проектируемого судна по формуле (31).

Описанный процесс нахождения факторов статистической обработки результатов эксперимента может быть использован и в других вопросах динамики судна, причем не обязательно рассматривать большое количество экспериментальных данных. Если имеется банк математических моделей испытанных судов, то эксперимент путем выбирается наиболее число тех из них, которые близки по форме к проектируемому судну. Обработка эксперимента производится путем решения задач типа (34), после чего получаются коэффициенты a_n , которые входят в соответствующую расчетную формулу для данного судна.

Алгоритмический подход имеет большое значение в тех проектных расчетах, в которых не требуется большой точности вычислений, но в то же время неучет какого-то явления может привести к сильному искажению результатов расчета. Примером тому служит расчет вибрации судна, когда приходится определять присоединенную массу и присоединенные моменты инерции массы воды, φ , с. величинам, часто теоретически путем не вычисляемым.

Входной язык для представления исходной информации о судовой поверхности

1. Информация о судовой поверхности представляется раздельно по окончностям судна. Координаты точек изображены следующим образом: x — по длине судна и оносности, y — по ширине судна на борту, z — по высоте судна и верхней палубе.

Плоскости отсчета выбираются так, чтобы координаты точек были отрицательными. Все размеры задаются в метрах.

2. Информация представляется для краев, лежащих на судовой поверхности и ограничивающих иррегулярную часть этой поверхности. Выбранным сеточным кривым присваиваются следующие наименования: ПАЛУБА — палубная линия; МИДЕЛЬ — граница цилиндрической части; ШТЕВЕНЬ — граница поверхности в оносности; ДНИЩЕ — диверсала линии; ШП1, ШП2, ... — обводы шпангоутов; БЛ1, БЛ2, ... — обводы ватерлиний.

Сеточные линии могут быть пространственными или плоскими. Например, при отсутствии плоского днища линия ДНИЩЕ лежит в диаметральной плоскости. В то же время при наличии транца линия ватерлинии — пространственная. Аналогично при наличии слема обвод слема, которому присваивается наименование БЛ, представляет собой пространственную кривую.

3. После наименования линии, если она лежит в плоскости, указывается положение этой плоскости. Например:

ШТЕВЕНЬ	$Y = 0;$
ШП12	$X = 10.2;$
ШП1	$X = 56.4;$
БЛ2	$Z = 2.5.$

4. Сеточная кривая представляется координатами точек, которые лежат ее на участке. Если кривая плоская, то указывается только две координаты точки. Например:

ПАЛУБА	$X =$	$Y =$	$Z =$
	$X =$	$Y =$	$Z =$
ДНИЩЕ	$X =$	$Y =$	$Z =$
	$X =$	$Y =$	$Z =$
ШТЕВЕНЬ	$Y = 0$	$X =$	$Z =$

		X =	Y =	Z =
МИДЕЛЬ	X =	Y =	Z =	
	X =	Y =	Z =	
ШП1	X = 56.4	Y =	Z =	
		Y =	Z =	
ВЛ2	Z = 2.5	X =	Y =	
		X =	Y =	

5. В исходную информацию входят координаты точек на границах участка, а также точки, расположенные примерно посредине каждого участка. Первые называются основными или четными точками, вторые — промежуточными или четными точками. Общее количество точек на кривой всегда нечетное. Максимальное число точек — 3.

В число основных точек обязательно входят все точки пересечения соседних кривых. Координаты точек пересечения указываются полностью только для одной из пересекающихся кривых. Для второй кривой информация неполная, причем в ней должно быть указано наименование первой кривой. Неполная информация должна содержать одну координату, по которой можно отыскать соответствующую полную информацию. Хотя пары пересекающихся кривых равноправны, следует фиксировать полную информацию для той кривой из каждой пары, которая задана первой по порядку. Таким образом, с учетом точек пересечения полная информация принимает следующий вид:

ПАЛУБА	X =	Y =	Z =
	X =	Y =	Z =
ДНИЩЕ	X =	Y =	Z =
	X =	Y =	Z =
ШТЕВЕНЬ	Y = 0	X =	Z = ПАЛУБА
		X =	Z =
		X =	Z = ДНИЩЕ
МИДЕЛЬ	X =	Z =	ПАЛУБА
	X =	Y =	Z =

		X =	Z = ДНИЩЕ
ШП1	X = 56.4	Z = ПАЛУБА	
		Y =	Z =
			Z = ДНИЩЕ
ВЛ2	Z = 2.5	X = МИДЕЛЬ	
		X =	Y =
		X = ШП1	
			X = ШТЕВЕНЬ

6. Среди основных точек следует различать фиксированные и сближающиеся. Для сближающихся точек одна или две координаты могут уточняться во время расчета. Идентификаторы соответствующих координат помечаются буквой *R*. Например:

	ПАЛУБА	X =	Y =	Z =
		X =	Y =	Z =
		X =	YR =	ZR =
ШП1	X = 56.4	YR =	Z =	
		Y =	Z =	
		YR =	Z =	

7. Помимо координат точек на кривой в исходную информацию могут войти тангенсы углов наклона касательной к кривой в ее крайних точках. Для того чтобы можно было различать тангенсы углов наклона разных проекций одной кривой, идентификаторы тангенса содержат пару букв из трех: *X, Y, Z*. Отказавшись от значений отрезков, соответствующих паре координат, дает значение тангенса угла наклона. Таким образом, идентификаторы рассматриваемых величин имеют следующую структуру:

TANUX — тангенс угла наклона в начале кривой (например, обход интерьера);
TAKYZ — тангенс угла наклона в конце кривой (обход экстерьера).

Все продольные кривые начинаются от низкого штампоугла, все поперечные кривые — от верхней палубы. В таком порядке производится запись координат точек на каждой кривой.

Значения тангентов углов наклона записываются после значащих координат точек. Максимальное число значений тангенса угла наклона проекций пространственной кривой составляет 4.

8. Сеточная кривая может состоять из двух отрезков или более (например, из-за сломов). В этом случае в конце информации по отрезку указывается спецификатор СЛОМ и каждый отрезок рассматривается как самостоятельная кривая, но без наименования.

Указатель литературы

1. Богданов А. А. Современный метод построения и оптимизации геометрического чертежа с помощью ЭВМ. [Обзор «Судостроение на рубежах», 1975, № 8.
2. Рейнов М. Н., Богданов А. А. Современный метод представления судовой поверхности. — В сб.: «Вопросы судостроения, Проектирование судна», 1972, вып. 2, с. 65—73.
3. Юдин Д. Е., Гольдштейн Е. Т. Лазейное программирование теории, методы и приложения. М., «Наука», 1968.
4. Рейнфельд Н., Фетисов У. Математическое программирование. М., ИЛ, 1960.
5. Рейнов М. Н., Марков В. А. Универсальная программа для решения задач линейного программирования. — В сб.: «Вопросы судостроения, Математические методы, программирование, эксплуатация ЭВМ», 1975, вып. 6, с. 45—55.
6. Нахимович Э. М. Подготовка информации для обработки турбулентных поверхностей на основе с программным управлением. ЛДЦП, 1966.
7. Смиродни А. В. Расчет сопряжения в реальной жесткости. — В сб.: «Вопросы судостроения, Проектирование судна», 1973, вып. 1, с. 123—129.
8. Вудрок В. И., Кунин В. Л. Метод элементов модулей. М., «Знание», 1971.

Оглавление

Метод линейного программирования в задаче согласования обводов корпуса судна	3
Нарисованная сетка судовой поверхности	8
Математическая модель судовой поверхности	13
Применение нелинейной модели судовой поверхности	21
Приложение к с. Вводной выкладки для представления выходящей информации о судовой поверхности	29
УКАЗАТЕЛЬ ЛИТЕРАТУРЫ	32